

Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para modelar la volatilidad de índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Nallely Jacqueline Reyes-García* Francisco Venegas-Martínez**
Salvador Cruz-Aké***

(Recibido: octubre 2017 /Aceptado: marzo 2018)

Resumen

El presente trabajo compara la capacidad de varios modelos de volatilidad dependiente del tiempo para explicar la dinámica estocástica del índice de precios y cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). En particular se analizan los procesos ARCH, M-GARCH, EGARCH y difusiones con saltos estocásticos y con cambio de régimen para la volatilidad (PJ-RS-SV por las siglas en inglés de *Poisson Jumps-Regime Switching-Stochastic Volatility*). En todos los casos, se realiza una parametrización econométrica que sirve como base para la simulación Monte Carlo de posibles trayectorias del IPC. Por último se muestran y se analizan las diferencias obtenidas por las distintas metodologías ante cambios en el precio inicial y la volatilidad inicial.

Palabras clave: volatilidad estocástica, simulación Monte Carlo, GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-SV.

Clasificación JEL: C58, C15, C13.

* Profesores-investigadores en la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. Correos electrónicos: njacqueline.reyesg@gmail.com, fvenegas1111@yahoo.com.mx, salvador.ake22@gmail.com

A comparative Analysis among GARCH-M, EGARCH and PJ-RS-SV Poisson Jumps-Regime Switching-Stochastic volatility approach to model the Mexican stock index

Abstract

This paper is aimed at comparing the capability of several models of time-dependent volatility to explain the stochastic dynamics of the Mexican Stock Index (IPC its acronym in Spanish) of the Mexican Stock Exchange (BMV its acronym in Spanish). In particular, the processes ARCH, M-GARCH, EGARCH, and diffusion with stochastic jumps and regime switching for volatility PJ-RS-SV (Poisson Jumps –Regime Switching– Stochastic Volatility) are analyzed. In all cases, an econometric parameterization is made that serves as a basis for the Monte Carlo simulation of possible IPC paths. Finally, the differences obtained by the distinct methodologies in the face of changes in the initial price and initial volatility are shown and analyzed.

Keywords: stochastic volatility, Monte Carlo simulation, GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-SV.

JEL clasificación: C580, C520, C13.

1. Introducción

En la literatura financiera se encuentran muchos modelos que intentan explicar el comportamiento de los rendimientos de diferentes activos, pero la mayoría tiene problemas para describirla de forma realista ya que los cambios estructurales introducen dificultades en el modelado de la dinámica de dichos rendimientos a lo largo del tiempo.

Como un intento para enmendar esta deficiencia se han desarrollado modelos que consideran cambios en la distribución de las series financieras; véanse, por ejemplo: Durham y Park (2013), Christoffersen, Santa-Clara y Yan (2010), Heston, y Jacobs (2009), Das y Sundaram (1999), González-Aréchiga, Díaz-Tinoco, Venegas-Martínez (2001) y Venegas-Martínez (2008), entre muchos otros.

En el presente trabajo se intenta modelar con diferentes procesos estocásticos la dinámica de los rendimientos y la volatilidad del índice de precios y cotizaciones (IPC) del mercado mexicano accionario. Entre más volátiles sean los precios de los activos, más grande es el riesgo de mercado, lo cual puede producir grandes ganancias pero también grandes pérdidas, motivo por el cual los participantes en los mercados accionarios están interesados en predecir la tendencia de dicha volatilidad.

Esta investigación se enfoca en examinar la dinámica de los rendimientos del índice bursátil, IPC, de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) mediante la aplicación de varias metodologías estadísticas. Una de estas metodologías incorpora los cambios de régimen y los saltos a través de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, cuyos resultados serán comparados con otros modelos econométricos como son los ARCH, GARCH-M, EGARCH.

El presente trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en la próxima sección se establecen los modelos y sus supuestos básicos; en la sección 3 se realiza un análisis comparativo de los pronósticos de cada uno de los modelos y se discute sobre las diferencias obtenidas; por último, en la sección 4 se presentan las conclusiones resaltando las ventajas y limitaciones de los diferentes modelos utilizados.

2. Breve descripción de los diferentes tipos de modelos

2.1. Modelos de volatilidad estocástica, SV

Los modelos de volatilidad estocástica (SV, por sus siglas en inglés) fueron propuestos en el trabajo seminal de Taylor en 1986. Estos modelos tratan a la varianza condicional como un proceso estocástico no observado, el cual es conducido por un componente aleatorio que conjunta todos los factores exógenos que afectan la varianza. Es decir, la volatilidad se modela como una variable latente (no observable) cuya evolución se rige por un proceso estocástico autorregresivo (AR).¹ En general, los modelos SV tienen cierto grado de dificultad en la estimación de sus parámetros ya que la función de verosimilitud, usualmente, es desconocida y por ello se recurre a la simulación

¹ Un proceso estocástico autorregresivo es una sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo en donde los valores presentes dependen de los valores pasados más un término de perturbación estocástica.

Monte Carlo. Es importante destacar que este tipo de modelos son, en general, no lineales y no gaussianos.

La distribución continua más simple para modelar una volatilidad dependiente del tiempo, σ_t es la distribución log-normal. De tal manera que $(\sigma_t) N(a, \beta^2)$ con ciertos parámetros a y β^2 . Esta distribución garantiza resultados positivos para la volatilidad y permite el cálculo de momentos y la identificación de cualquier exceso de curtosis en los rendimientos (Taylor, 1986).² Asimismo, las autocorrelaciones de volatilidad en los procesos SV son proporcionales a los excesos de rentabilidad absoluta. Esto quiere decir que las autocorrelaciones de volatilidad disminuyen lentamente. Así, el proceso estocástico estacionario más simple para volatilidad estocástica es un proceso gaussiano AR en logaritmos:

$$\log(\sigma_t) - \alpha = \phi(\log(\sigma_{t-1}) - \alpha) + \eta_t \quad (1)$$

En este caso, el parámetro ϕ , $-1 < \phi < 1$, representa persistencia de la volatilidad. Los residuos de volatilidad, η_t son variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*) $N(0, \sigma_n^2 = \beta^2(1-\phi^2))$ con.

2.1.1. Propiedades básicas del modelo SV de Taylor

El modelo SV de Taylor (el más simple) está dado por:

$$r_t = \mu + \sigma_t u_t \quad (2)$$

donde $u_t N(0,1)$ son variables *i.i.d* y los procesos $\{\sigma_t\}$ y $\{u_t\}$ son estocásticamente independientes. En este caso, los rendimientos son procesos estrictamente estacionarios ya que es el producto de procesos independientes estrictamente estacionarios. También son de covarianza estacionaria ya que la varianza es finita. Otras propiedades del modelo son:

- i. Todos los momentos son finitos y la curtosis es igual a $3 \exp(4\beta^2)$.
- ii. La correlación entre los rendimientos r_t y $r_{t+\tau}$ es cero para todo $\tau > 0$.
- iii. La correlación entre el cuadrado del exceso del rendimiento $s_t = (r_t - \mu)^2$ y $s_{t+\tau}$ es positivo para todo $\tau > 0$ cuando ϕ es positivo. La correlación

² Varios estudios, por ejemplo, Harvey y Shephard (1996) y Andersen (1996) proporcionan evidencia empírica a la distribución lognormal para el modelado de la volatilidad bajo ciertas condiciones.

es aproximadamente igual a $C\phi^\tau$. La función de autocorrelación de $a_t^p = |r_t - \mu|^p$ tiene aproximadamente la misma forma que la de s_t para todo p positivo.

Conviene señalar que el modelo SV log-normal no permite a la volatilidad reaccionar asimétricamente a las caídas de precios y aumentos de precios ya que es independiente de los signos de todos los rendimientos anteriores.

2.1.2. Descripción del modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo

De acuerdo con Grajales-Correa, Pérez-Ramírez y Venegas-Martínez (2008) y Venegas-Martínez (2008), un modelo simple de volatilidad estocástica en tiempo continuo del precio de un activo satisface la siguiente las siguientes ecuaciones:³

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dU_t \quad (3)$$

donde u es rendimiento medio esperado (anualizado) y el proceso $(U_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, (\mathcal{F}_t^U)_{t \in [0, T]}, P^U)$. Asimismo, la volatilidad instantánea, σ_t , satisface

$$d\sigma_t^2 = A(\sigma_t^2, t)dt + B(\sigma_t^2, t)dW_t \quad (4)$$

donde $A(\sigma_t^2, t)$ y $B(\sigma_t^2, t)$ son funciones bien comportadas y el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, P^W)$, $\mathcal{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ con $\text{Cov}(dU_t, dW_t) = \rho dt$.

2.2. Modelo markoviano de cambio de régimen

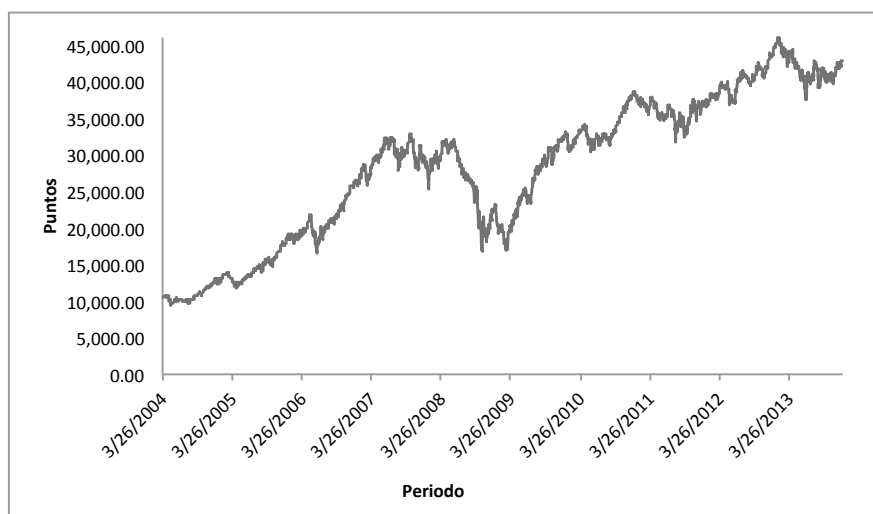
El modelo markoviano de cambio de régimen es muy útil debido a sus bondades en la descripción de cambios en el comportamiento promedio y/o en la volatilidad de la serie.

³ Véanse también Venegas Martínez (2001), (2006) y Venegas-Martínez, Medina Hurtado, Jaramillo y Ramírez Atehortúa (2008) para más detalles sobre procesos de difusión.

2.2.1. *Propiedades básicas del modelo de cambio de régimen*

El modelo consiste en un sistema múltiple de ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales intentan describir el comportamiento de series de tiempo en diferentes regímenes. El modelo permite capturar patrones dinámicos más complejos que el del apartado anterior y una de sus características es que el mecanismo de cambio de régimen se controla mediante una variable de estado no observada que sigue una cadena de Markov de orden uno. En las últimas décadas estos modelos se han popularizado; la evidencia empírica que proporcionan para la descripción de series de tiempo se puede encontrar, por ejemplo, en Magrebí, Kim y Nishina (2007) que sugieren que este tipo de modelos dependientes del régimen permiten realizar ajustes sobre los errores de pronóstico (Cheng, Ho, Hu y Wang, 2012). Asimismo, como los quiebres estructurales son característicos de muchas series de precios de activos financieros se hace necesario utilizar modelos más flexibles que admitan diferencias en el comportamiento de una variable en función de los estados de la naturaleza o regímenes. En la gráfica 1 se observa la tendencia del IPC y se destacan visiblemente los quiebres estructurales.

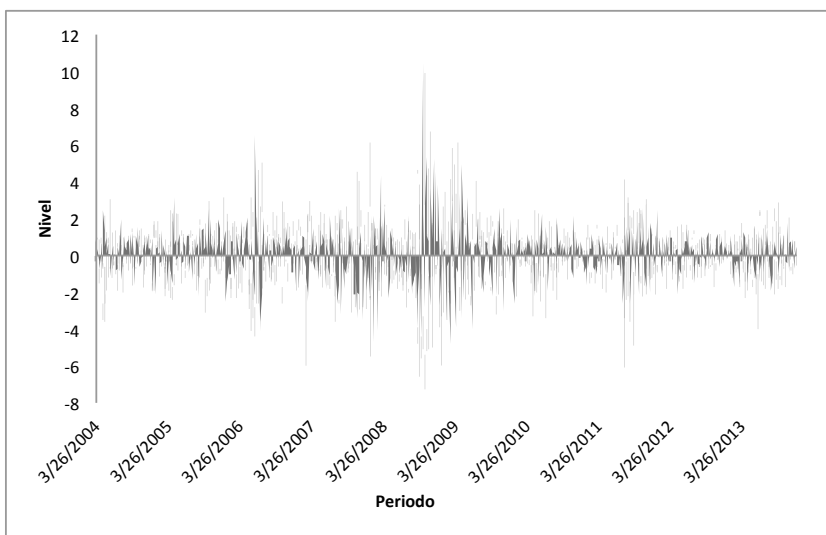
Gráfica 1
Índice de precios y cotizaciones (2004-2013)



Fuente: elaboración propia con datos de Banxico

La ocurrencia de sucesos que afectan la dinámica de una serie de tiempo puede producir cambios en el comportamiento de los agentes: pánicos, especulaciones, cambios de políticas. Estos sucesos, a su vez, dan lugar, usualmente, a cambios de régimen. En la gráfica 1 se observa que el IPC muestra diferentes tendencias separadas en el tiempo, lo que implica la existencia de cambios estructurales, mismos que son mejor percibidos en la gráfica 2 donde claramente sobresalen los periodos de alta volatilidad comparados frente a los que son de baja volatilidad (lo que se conoce como Markov Regime Switching).

Gráfica 2
Rendimiento del IPC (2004-2013)



Fuente: elaboración propia con datos de Banxico

En general, cuando se hace referencia al rendimiento de un índice bursátil se considera la variación logarítmica del precio de cierre del índice para dos días consecutivos de mercado. Así, el rendimiento, y_t , diario del índice bursátil para el día t , está dado por la siguiente fórmula:

$$y_t = 100[\log(p_t) - \log(p_{t-1})] \quad (5)$$

donde p_t es el nivel del índice en el día t y p_{t-1} es el nivel del índice en el día $t-1$. Por otro lado, es necesario enfatizar algunas características distintivas

que tienen los rendimientos⁴ por ejemplo: *clusters*⁵ de volatilidad, exceso de curtosis, alta persistencia de volatilidad y asimetría (o sesgo), entre otros. Con base en (5) se realizó el cálculo del rendimiento logarítmico del IPC con Excel y se obtuvieron los resultados mostrados en la gráfica 2 en donde se pueden observar varios *clusters*⁶ de volatilidad a lo largo del periodo.

2.3. Modelos PJ bivariados normales

Los modelos PJ (*Poisson Jumps* por sus siglas en inglés) bivariados normales suponen que los saltos a escala se toman en proporción a la volatilidad del componente de difusión del proceso. Esto es, si J_{1t} y J_{2t} provienen de una distribución bivariada normal con:

$$J_{1t} | \exp(v_t / 2) : N(\mu_{1J}, \sigma_{1J}^2), J_{2t} | \sigma(s_t) : N(\mu_{2J}, \sigma_{2J}^2) \quad (6)$$

De esta manera se tienen saltos más grandes cuando la volatilidad es mayor, el modelo PJ bivariado normal es capaz de proporcionar dinámicas más realistas para ciertos rendimientos como se muestra en Durham and Park (2013). Se denota el tamaño medio esperado del salto (condicional al estado de volatilidad) como:

$$\bar{\mu}_{1J_t} = E(e^{J_{1t}} - 1) \text{ y } \bar{\mu}_{2J_t} = E(J_{2t}) \quad (7)$$

2.4. Familias de modelos SV

2.4.1. Modelo SV autorregresivo

El modelo SV autorregresivo plantea que el logaritmo de la volatilidad se rige por un proceso estocástico de tipo autorregresivo. La especificación de la ecuación de la media es:

$$r_t = \mu_t + \sigma^* \sigma_t \varepsilon_t \quad (8)$$

⁴ Desde el trabajo seminal de Fama (1965) se estudian las características comunes de los rendimientos.

⁵ Son los periodos caracterizados por alta y baja volatilidad. Si la volatilidad es alta en un periodo, tiende a seguir siéndolo; y si es baja en un periodo, tiende a seguir siendo baja en el siguiente periodo.

⁶ Los *clusters* más evidentes son a mediados del año 2006, a finales del 2008, seguido del principio del 2009, y a finales del 2011. Muchos eventos generados por la especulación en su mayoría y no es de omitirse por rezagos de crisis financieras como la de 2008 que afectó primordialmente a Estados Unidos, pero en paralelo afectó a nuestro país.

donde r_t es el rendimiento de la serie, μ_t es media del proceso de los rendimientos, σ^* es un parámetro de escala positivo, σ_t es un proceso estocástico que genera la volatilidad, ε_t es el término de perturbación aleatoria *i.i.d*, $N(0,1)$ *i.i.d*. y ε_t y σ_t son procesos independientes. Anteriormente se señaló que son dos ecuaciones las comúnmente utilizadas en los modelos SV, la segunda ecuación se refiere a la ecuación de la volatilidad, la cual se expresa mediante

$$\sigma_t^2 = e^{h_t} \quad (9)$$

donde

$$h_t = \log(\sigma_t^2) \quad (10)$$

es importante mencionar que Taylor (1986), inicialmente propuso

$$h_t = \phi h_t + v_t \quad (11)$$

con $|\phi| < 1$ y $N(0, \sigma_v^2)$.

2.4.2. Modelo SV autorregresivo asimétrico

El modelo SV autorregresivo asimétrico propuesto por Harvey y Shephard (1996) tiene la siguiente forma funcional definida por las ecuaciones de la media y volatilidad como sigue:

$$r_t = \mu_t + \sigma^* \sigma_t \varepsilon_t \quad (12)$$

$$\sigma_t^2 = e^{h_t} \quad (13)$$

La única diferencia en comparación con el modelo en la subsección anterior, son las perturbaciones, ya que aquí éstas se rigen por una distribución normal bivariada:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ v_{t+1} \end{pmatrix} : N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \delta \sigma_v \\ \delta \sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \right) \text{ i.i.d.} \quad (14)$$

En este caso se tiene que si:

$\delta < 0$: un valor negativo en ε en el periodo t induce valores positivos v en el periodo $t+1$ y volatilidad más alta.

$\delta < 0$: un valor positivo en ε durante el periodo t induce valores negativos en el periodo $t+1$ y volatilidad más baja.

$\delta = 0$: implica un modelo de volatilidad estocástica autorregresivo.

Hasta ahora sólo se han descrito los modelos SV más utilizados para estimar la volatilidad de series financieras, en el cuadro 1 se enlistan otros modelos.

Cuadro 1
Modelos SV

| Autor(es) | Aportación principal |
|--|---|
| Das y Sundaram (1999) | Muestran que la volatilidad de la volatilidad y la correlación entre las innovaciones en el precio de un activo y su volatilidad (efecto apalancamiento) afectan la forma de la sonrisa de volatilidad. También muestran que el tamaño y la intensidad de los saltos en los rendimientos también afectan la forma de la sonrisa. |
| Harvey y Siddique (1999) | Destacan que los modelos GARCH incorporan el sesgo variable en el tiempo. |
| Johnson (2002) | Desarrolla un modelo SV con correlación variable en el tiempo entre el rendimiento y las innovaciones en la volatilidad. |
| Jhones (2003) | Propone un modelo de elasticidad constante de la varianza que incorpora un efecto apalancamiento variable en el tiempo. |
| Carr y Wu (2007) | En su modelo, los saltos de los tipos de cambio pueden ser positivos y negativos y son conducidos por procesos de Levy independientes. |
| Chtistoffe-sen, Heston y Jacobs (2009) | Proponen un modelo SV de dos factores que puede generar una correlación variable con el tiempo. |
| Santa Clara y Yun (2010) | Desarrollan un modelo que permiten que la intensidad del salto sea estocástica. |
| Durham y Park (2013) | Este describe dinámicas más realistas mediante la generación de saltos más grandes cuando la volatilidad es mayor. Además, incorpora una función de cambio de régimen que permite cambios aleatorios en los parámetros que rigen la volatilidad de la volatilidad. Este modelo conocido como PJ-RS-SV (regime-switching in volatility of volatility) es consistente con los cambios en la forma de la distribución de rendimientos. |

Fuente: elaboración propia

3. Análisis comparativo de los modelos y resultados empíricos

Con el fin de realizar el análisis comparativo entre las alternativas se calcularán 1000 trayectorias mediante simulación Monte Carlo. La rutina de simulación consiste en los siguientes pasos:

1. Primero se calculan los rendimientos anualizados del IPC
2. Se obtiene el rendimiento medio anualizado
3. Se calcula la desviación estándar de los rendimientos medios anualizados
4. Se generan dos números aleatorios uniformes y se sustituyeron en la Z de la fórmula de Box-Muller:

$$Z = \sqrt{2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2) \quad (15)$$

5. Finalmente se sustituyen los valores en la siguientes expresiones:

$$S_{\frac{1}{360}} = S_0 e^{\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{360} + \left(\sigma \sqrt{\frac{1}{360}} Z \right) \right\}}$$

M

$$S_{\frac{360}{360}} = S_{359} e^{\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{360} + \left(\sigma \sqrt{\frac{1}{360}} Z \right) \right\}}$$

(16)

donde, S_0 = rendimiento del día de hoy; $\Delta = \frac{1}{360}$ un día como proporción de año.

6. La rutina proporciona valores para cada año. El periodo que se utilizó comprende 10 años (2004-2013) por lo que cada trayectoria considera 10 años con la intención de obtener un mejor resultado.

3.1. Estimación con modelos Markov Regime Switching

El caso más simple de modelo de cambio de régimen es el de Halmilton (1989), el cual se representa por:

$$y_t = \begin{cases} \alpha_{01} + \alpha_{11}y_{t-1} + U_t, & s_t = 1 \\ \alpha_{02} + \alpha_{12}y_{t-1} + U_t, & s_t = 2 \end{cases} \quad (17)$$

donde S_t es el estado o régimen y U_t es una perturbación que se supone que es independiente e idénticamente distribuida $U_t(0, \sigma^2)$ i.i.d. Los estados siguen una cadena de Markov:

$$\Pr(s_t = i | s_{t-1} = j) = \pi_{ij}, \quad i, j=1,2. \quad (18)$$

El valor π_{ij} se conoce como la probabilidad de transición de ir del estado j al estado i y se supone que es independiente del tiempo (homogénea en el tiempo). Las probabilidades de transición pueden ser representadas en una matriz de la siguiente manera:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} \quad (19)$$

en la cual se cumple $\sum_{j=1}^2 \pi_{ij} = 1$ para toda i . La cadena de Markov permite la conmutación entre los diferentes regímenes y, por tanto, puede capturar patrones dinámicos de mayor complejidad. Para el caso del IPC se obtuvieron los siguientes datos:

Cuadro 2
Matriz de transición estimada

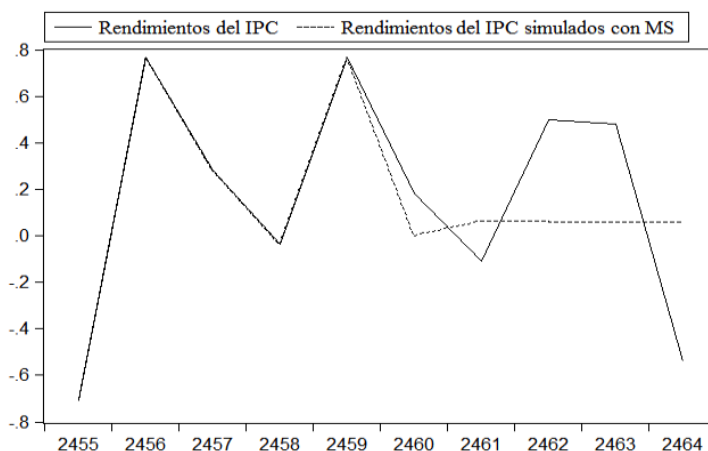
| Matrices de transición: probabilidades de transición de la cadena de Markov muestra (ajustada): 2464 observaciones incluidas: 2463 después de los ajustes | | | |
|--|---|----------|----------|
| $P(i, j) = P(s(t) = j \mid s(t-1) = i)$ (fila = i / columna = j) | | 1 | 2 |
| Todos los periodos | 1 | 0.501176 | 0.498824 |
| | 2 | 0.463243 | 0.536757 |

Fuente: elaboración propia.

El valor 0.501176 en la matriz de transición (véase cuadro 2) representan la probabilidad de pasar de volatilidad alta a volatilidad alta en el primer periodo, mientras que la probabilidad de pasar de volatilidad alta a volatilidad baja en el primer periodo es 0.4632.43. De la misma forma se interpretan los otros valores. A continuación, en la gráfica 3, se presenta el pronóstico de los últimos cinco días sobre los rendimientos del IPC, mediante un ARCH(1,1).

Como se puede observar en la gráfica 3, el pronóstico realizado indica que el modelo está subestimado, lo cual se confirma en el cuadro 3.

Gráfica 3
Rendimiento del IPC y su pronóstico ARCH (1,1)



Fuente: elaboración propia

Cuadro 3
Pronóstico del modelo MS

| Día | Rendimiento IPC | Estimación del rendimiento del IPC |
|------|-----------------|------------------------------------|
| 2460 | 0.182458 | 0.00164 |
| 2461 | -0.106524 | 0.061551 |
| 2462 | 0.499218 | 0.056853 |
| 2463 | 0.479747 | 0.057222 |
| 2464 | -0.540884 | 0.057193 |

Fuente: elaboración propia.

3.2. Estimación, evaluación y pronóstico del modelo ARCH

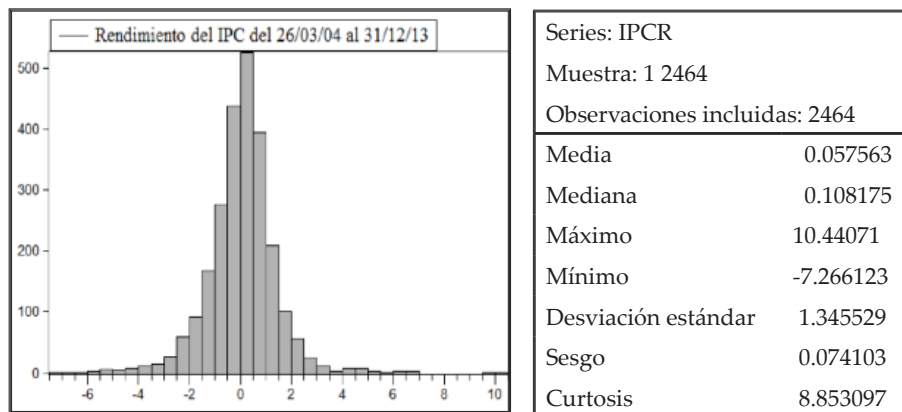
El modelo básico ARCH fue desarrollado por Engle (1982) al proponer que la volatilidad condicionada cambiante en el tiempo se modelara mediante un proceso autorregresivo de heteroscedasticidad condicional (ARCH). Esta aproximación permite la descripción de la varianza a través de términos

de perturbación estocásticos de periodos pasados. En este caso, la varianza no es constante y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas.

A continuación se realiza un análisis de las estadísticas descriptivas de la serie. Los datos utilizados provienen de Banxico. El periodo que contemplan los datos diarios de cierre del IPC es del 26 de marzo de 2004 al 31 de diciembre de 2013. Si se omiten los días que el mercado no operó se obtienen 2464 observaciones.

En la gráfica 4 se muestra el histograma de la serie y sus estadísticas descriptivas. Conviene señalar que el valor de la curtosis es de 8.85. Es decir, la serie tiene exceso de curtosis (comparada con la curtosis de la distribución normal). Por lo tanto es leptocúrtica, lo que, a su vez, implica que asigna diferentes probabilidades a valores extremos en comparación con la distribución normal. Asimismo, la probabilidad de que los rendimientos sean negativos es mayor que la probabilidad que proporciona la distribución normal. Es decir, la probabilidad de obtener pérdidas es mucho mayor y, por último, también se observa que la distribución empírica tiene un pequeño sesgo positivo de 0.0741.

Gráfica 4
Histograma y estadísticas descriptivas del rendimiento del IPC

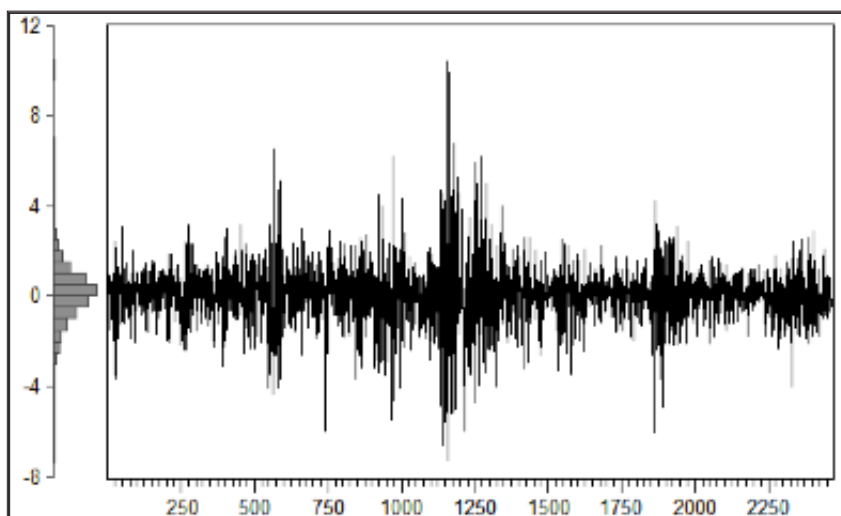


Fuente: elaboración propia

Con base en el correlograma y de acuerdo al comportamiento de los rezagos se tiene que la serie es estacionaria. También se realizó la prueba de raíz

unitaria con un p -valor de 0.000, con lo cual la serie no tiene raíz unitaria y así se confirma que la serie no tiene tendencia y, por lo tanto, no se rechaza que la serie sea estacionaria. Así mismo se detectó el efecto ARCH mediante la prueba de multiplicadores de Lagrange LM donde se obtuvo un p -valor de 0.000, lo que significa que se rechaza la hipótesis nula de que no hay ARCH y, por lo tanto, se acepta que la serie tiene efecto ARCH. También se examinaron los residuos y se corroboró que los rendimientos presentaban *clusters* de volatilidad como se muestra en la gráfica 5. Es decir, que periodos de baja (o alta) volatilidad son seguidos por periodos de baja (ó alta). En la misma gráfica se puede apreciar que el periodo de mayor volatilidad se da en los días 1149-1163 que corresponden a agosto de 2008, lo cual se asocia con la crisis financiera global ocurrida en ese año.

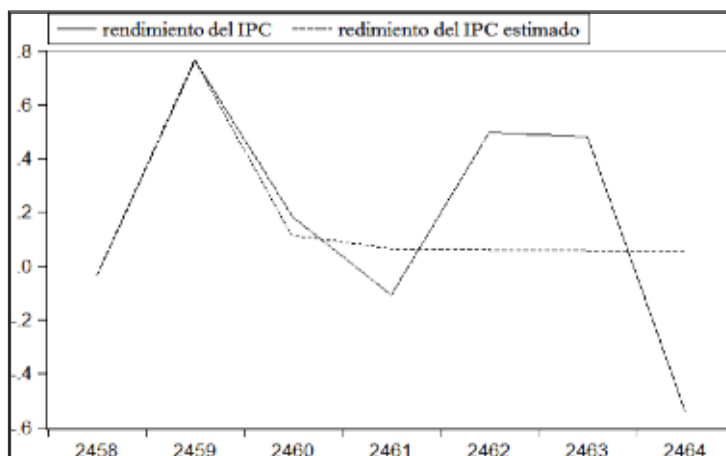
Gráfica 5
Rendimientos del IPC (2004-2013)



Fuente: elaboración propia.

Después de mostrar evidencia empírica que soporta el uso de los modelos de la familia ARCH, se estima a continuación un primer modelo ARIMA(1,1,0), con el cual se obtuvieron los valores más pequeños en los criterios AIC y SIC. El pronóstico para los últimos cinco días de mercado se presenta en la gráfica 6.

Gráfica 6
Rendimientos del IPC y su pronóstico ARIMA (1,1,0)



Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en la gráfica anterior, el pronóstico realizado indica que el modelo está subestimado de acuerdo con los valores del cuadro 4.

Cuadro 4
Pronóstico del modelo AR(1)

| Día | Rendimiento IPC | Estimación del rendimiento del IPC |
|------|-----------------|------------------------------------|
| 2460 | 0.182458 | 0.112753 |
| 2461 | -0.106524 | 0.061554 |
| 2462 | 0.499218 | 0.057539 |
| 2463 | 0.479747 | 0.057225 |
| 2464 | -0.540884 | 0.0572 |

Fuente: elaboración propia.

Como los modelo ARIMA tienen varias limitaciones, es pertinente emplear un modelo que permita incorporar la varianza (no constante), como lo es el modelo ARCH que a continuación se detalla. Para seleccionar el mejor modelo se escoge el que tenga los valores más pequeños en los criterios de información de Schwarz (SIC) y Akaike (AIC). Para el pronóstico se consideró un intervalo de confianza del 95% de confianza como se muestra en el cuadro 5.

Cuadro 5
Resultados de los modelos ARCH

| Modelo | Parámetro constante | Parámetro ARCH(1) | Parámetro ARCH(2) | Parámetro ARCH(3) | Suma de coeficientes |
|---------|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| ARCH(1) | 1.387971 | 0.250273 | | | 0.250273 |
| ARCH(2) | 0.925548 | 0.213324 | 0.32322 | | 0.536544 |
| ARCH(3) | 0.781689 | 0.19123 | 0.254046 | 0.162673 | 0.607949 |

Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en el cuadro 5, la suma de los coeficientes del modelo ARCH(3) es mayor en comparación con los otros dos modelos. La suma de los parámetros de dicho modelo es de 0.607949 y al parecer no es un valor cercano a la unidad y, por lo tanto, no refleja que los *shocks* de volatilidad sean persistentes. A continuación se observa en el cuadro 6 que incluso los valores de los criterios de información AIC y SIC son los más pequeños para ese mismo modelo, por lo que se puede decir que el ARCH(3) es el mejor modelo; al menos de los tres que se estimaron.

Cuadro 6
Criterios de información de los modelos ARCH

| Modelo | Criterio AIC | Criterio SIC |
|---------|--------------|--------------|
| ARCH(1) | 3.370292 | 3.377366 |
| ARCH(2) | 3.272541 | 3.281973 |
| ARCH(3) | 3.242163 | 3.253951 |

Fuente: elaboración propia.

3.3. Estimación, evaluación y pronóstico del modelo GARCH

En 1986 Bollerslev generalizó el modelo ARCH a GARCH donde se reduce el número de parámetros a estimar de infinito a únicamente dos. De tal forma que al igual que el modelo anterior, también se toma en cuenta el exceso de curtosis y los clusters de volatilidad. En este modelo la varianza condicional depende de la varianza de los periodos anteriores y del cuadrado de las innovaciones pasadas. En la estimación de los modelos GARCH,

en el cuadro 7, sobresale el de mayor valor de la suma de los parámetros, el modelo GARCH (2,2). Aunque, por otro lado, este modelo tiene tres elementos que resultaron estadísticamente no significativos, además de que el signo de algunos coeficientes resultó negativo.

Cuadro 7
Resultados de los modelos GARCH

| Modelo | Parámetro constante | Parámetro ARCH(1) | Parámetro ARCH(2) | Parámetro ARCH(3) | Parámetro GARCH(1) | Parámetro GARCH(2) | Parámetro GARCH(3) | Suma de coeficientes |
|------------|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|
| GARCH(1,1) | 0.025932 | 0.097718 | | | 0.888664 | | | 0.986382 |
| GARCH(1,2) | 0.026303 | 0.099492 | | | 0.867716 | {0.019012} | | 0.98622 |
| GARCH(1,3) | 0.027709 | 0.108053 | | | 0.875017 | {-0.126809} | {0.129371} | 0.985632 |
| GARCH(2,1) | 0.02569 | 0.100088 | {-0.002794} | | 0.889257 | | | 0.986551 |
| GARCH(2,2) | 0.019326 | 0.101904 | {-0.02838} | | {1.12875} | {-0.21237} | | 0.989904 |
| GARCH(2,3) | 0.05773 | 0.116941 | 0.133823 | | -0.210293 | 0.368712 | 0.563941 | 0.973124 |
| GARCH(3,1) | 0.023749 | {0.098434} | {0.014394} | -0.02125 | 0.895946 | | | 0.987524 |
| GARCH(3,2) | 0.036128 | 0.097941 | {0.075274} | {-0.032446} | {0.370483} | {0.469946} | | 0.981198 |
| GARCH(3,3) | 0.073023 | 0.103663 | 0.150625 | 0.063378 | -0.464902 | 0.299762 | 0.813372 | 0.965798 |

{ } No significativos estadísticamente con un intervalo de confianza del 95%.

Fuente: elaboración propia.

En el cuadro 8 se resumen los criterios AIC y SIC para cada estimación realizada de los modelos GARCH.

Cuadro 8
Criterios de información de los modelos GARCH

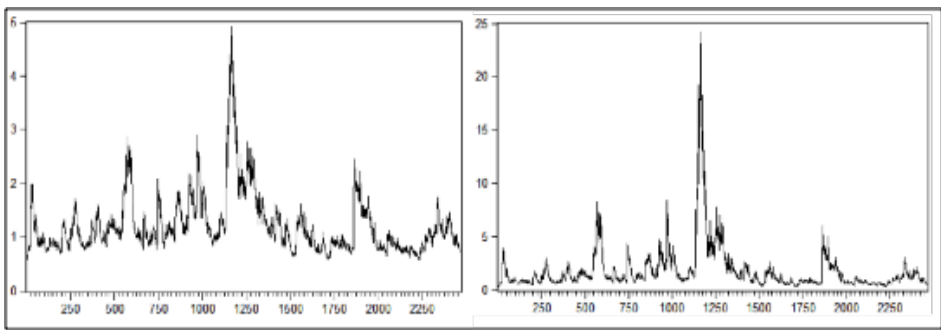
| Modelo | Criterio AIC | Criterio SIC |
|------------|--------------|--------------|
| GARCH(1,1) | 3.098121 | 3.107553 |
| GARCH(1,2) | 3.098929 | 3.110718 |
| GARCH(1,3) | 3.099553 | 3.113699 |
| GARCH(2,1) | 3.098928 | 3.110717 |
| GARCH(2,2) | 3.099731 | 3.113878 |
| GARCH(2,3) | 3.098478 | 3.114983 |
| GARCH(3,1) | 3.099492 | 3.113638 |
| GARCH(3,2) | 3.099709 | 3.116213 |
| GARCH(3,3) | 3.095796 | 3.114659 |

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el cuadro 8, el valor más pequeño del criterio AIC se obtuvo para el modelo GARCH(3,3). En contraste, el mínimo valor sobre el criterio SIC lo arrojó el modelo GARCH (1,1). Por lo tanto, el mejor modelo de este tipo al parecer es el GARCH(1,1) ya que el GARCH(3,3) muestra un signo negativo en uno de sus coeficientes. Además se utilizó de forma alternativa el criterio Hannan-Quinn, el cual resultó ser menor para el modelo que se eligió.

Gráfica 7

Desviación estándar y varianza condicional del modelo GARCH (1,1)



Fuente: elaboración propia.

3.4. Estimación, evaluación y pronóstico del modelo EGARCH

El modelo GARCH fue propuesto por Bollerslev en 1986, es un modelo ARCH generalizado que inicialmente desarrolló Engle en 1982 y a partir de entonces se han propuesto diversas variantes. Este tipo de modelos se especifican a través de un sistema de dos ecuaciones y con este tipo de modelos es posible la estimación de la volatilidad. La primera ecuación explica la evolución de los rendimientos en función de rendimientos pasados y la segunda ecuación modela la evolución de la varianza de los rendimientos, y mediante la varianza se realiza la estimación de la volatilidad. En este caso, si $\{y_t\}$ es una serie de observaciones diarias, y_t se define en función de sus valores pasados como:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_n y_{t-n} + U_t \quad (20)$$

$$U_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (21)$$

En donde v_t es un conjunto de variables $v_t \sim N(0,1)$ i.i.d. y $h_t = \hat{E}_{t-1}(u_t^2)$ lo que conduce a una heteroscedasticidad condicional. Un proceso GARCH se define de la siguiente forma:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-2} + \dots + \alpha_r h_{t-r} + \delta_1 u_{t-1}^2 + \delta_2 u_{t-2}^2 + \dots + \delta_m u_{t-m}^2 \quad (22)$$

Una limitación de los modelos GARCH es que la varianza condicional responde de la misma manera a los residuos positivos que a los negativos. Para enmendar esto Nelson (1990) y (1991) propone el modelo GARCH exponencial o EGARCH, lo cual permite una respuesta asimétrica de la varianza condicional en función del signo de los residuos. Es decir, se puede modelar la asimetría de la volatilidad condicional. Nelson define su modelo EGARCH como:

$$\xi_t = a_t \sigma_t, \quad a_t : N(0,1) \quad \ln(\sigma_t^2) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(a_{t,k}), \quad \beta_1 \equiv 1 \quad (23)$$

donde $\{\delta_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ son sucesiones no estocásticas de números reales. Por otro lado, autores como Grajales (2008) para estimar la volatilidad condicional describen el modelo EGARCH (1,1) de la siguiente forma:

$$\ln(\sigma_t^2) = \delta_0 + \delta_1 \left| \frac{\xi_t - 1}{\sigma_t - 1} \right| + \gamma \frac{\xi_t - 1}{\sigma_t - 1} + \theta \ln \sigma_t^2 - 1 \quad (24)$$

y, por lo tanto,

$$\sigma_t^2 = (\sigma_t^2 - 1)^{\theta_1} \exp \left(\delta_0 + \delta_1 \left| \frac{\xi_t - 1}{\sigma_t - 1} \right| + \gamma \frac{\xi_t - 1}{\sigma_t - 1} + \theta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) \right) \quad (25)$$

En este tipo de modelos a diferencia de los modelos GARCH no hay restricciones en los parámetros, mientras que el modelo GARCH tiene una limitación importante ya que trata los efectos de modo simétrico pues considera los cuadrados de las innovaciones. Otra limitación son las restricciones que deben cumplir los parámetros (Grajales-Correa, *et al.*, 2008, p. 10). Como consecuencia del modelado GARCH, las distribuciones que se usan son simétricas, y no se puede modelar la correlación negativa entre los cambios en los precios de los activos y los cambios en la volatilidad, pues, en

general, dichos cambios son asimétricos. Los resultados para el modelo EGARCH (1,1) se presentan en el cuadro 9.

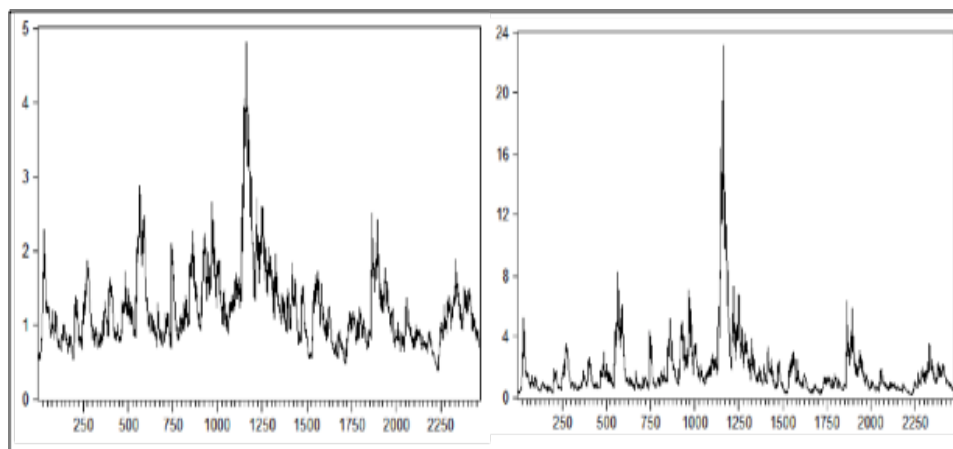
Cuadro 9
Resultados de los modelos EGARCH (1,1)

| Variable dependiente: IPCR | | | | |
|--|--------------|----------------------------|---------------|----------|
| Método: ML-ARCH(Marquardt)-Distribución normal | | | | |
| Fecha: 10/24/14 hora: 17:08 | | | | |
| Muestra: 1 2464 | | | | |
| Observaciones incluidas: 2464 | | | | |
| Convergencia lograda después de 13 iteraciones | | | | |
| Varianza de la muestra previa: (parámetro = 0.7) | | | | |
| LOG(GARCH)=C(2)+C(3)*ABS(RESID(-1))/@SQRT(GARCH(-1)))+C(4) | | | | |
| *RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))-C(5)*LOG(GARCH(-1)) | | | | |
| Variable | Coefficiente | Error estándar | Estadístico t | Prob. |
| C | 0.040815 | 0.019751 | 2.066536 | 0.0388 |
| Varianza de la ecuación | | | | |
| C(2) | -0.120201 | 0.013230 | -9.085361 | 0.0000 |
| C(3) | 0.164101 | 0.016949 | 9.681798 | 0.0000 |
| C(4) | -0.102395 | 0.009716 | -10.53887 | 0.0000 |
| C(5) | 0.978342 | 0.002793 | 350.2472 | 0.0000 |
| R-cuadrada | -0.000155 | Media de la Var. Dep. | | 0.057563 |
| R cuadrada- Ajustada | -0.000155 | Desviación de la Var. Dep. | | 1.345529 |
| Desviación de la Reg. | 1.345633 | Criterio de Akaike | | 3.071864 |
| Suma de residuos Cuad. | 4459.826 | Criterio de Schwarz | | 3.083653 |
| Log Verosimilitud | -3779.536 | Criterio de Hannan-Quinn | | 3.076147 |
| Estadístico Durbin-Watson | 1.842696 | | | |

Fuente: elaboración propia.

Se observa en el cuadro 9 que todos los parámetros del modelo son estadísticamente significativos, y los criterios AIC y SIC son mucho menores que los de los modelos estimados con anterioridad. A pesar de que existen dos signos negativos se puede suponer que es un buen modelo con un nivel de confianza del 95%. Para la evaluación del modelo se muestra a continuación la varianza y desviación estándar del EGARCH(1,1).

Gráfica 8
Desviación estándar y varianza condicional del modelo EGARCH (1,1)



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los criterios SIC y AIC obtenidos en los mejores tres modelos se puede observar en el cuadro 10 que, efectivamente, el mejor modelo es el de EGARCH, el cual presenta los valores más bajos para los criterios de información. Además de que dicho modelo permite capturar los efectos asimétricos que muestran los rendimientos del IPC y, de igual forma, los coeficientes obtenidos son estadísticamente significativos.

Cuadro 10
Criterios de información de los modelos

| Modelo | Criterio AIC | Criterio SIC |
|-------------|--------------|--------------|
| ARCH(1) | 3.370292 | 3.377366 |
| GARCH(1,1) | 3.098121 | 3.107553 |
| EGARCH(1,1) | 3.071864 | 3.083653 |

Fuente: elaboración propia.

3.5. Estimación, evaluación y pronóstico del modelo PJ-RS-SV (Durham y Park, 2013)

Cuando se combinan procesos de difusión con procesos de saltos se tienen colas gordas lo que lleva a la violación del supuesto de normalidad estacionaria para series de rendimientos. Esto obliga a utilizar otras herramientas que consideren colas gordas o colas pesadas, lo cual está relacionado con la asimetría y la curtosis de las series de rendimientos. Dicha fusión de procesos da pie a racionalizar dinámicas de precios que no pueden generarse con modelos que sólo consideran movimientos brownianos. Durham y Park (2013) proponen un modelo de volatilidad estocástica (SV) con una función de cambio de régimen que permite cambios aleatorios en los parámetros que rigen la volatilidad de la volatilidad. El modelo es conocido como PJ-RS-SV (*Poisson jumps, regime-switching stochastic volatility*) y es consistente con cambios en la distribución de los rendimientos. En una primera ecuación se modela el rendimiento con un movimiento browniano geométrico combinado con saltos de Poisson. En una segunda ecuación se modela la volatilidad con un proceso de reversión a la media también combinado con saltos y en la tercera ecuación modela el cambio de régimen (dos posibles estados). Los tamaños de los dos saltos de Poisson provienen de una distribución normal bivariada. Más específicamente, dado un espacio de probabilidad (Ω, F, P) fijo y una filtración $\{F_t\}$, los rendimientos de un activo, y_t , siguen una ecuación de la forma

$$y_t = \left[\mu - \bar{\mu}_{1,t} \lambda_1(S_t) - \frac{1}{2} \exp(vt) \right] dt + \exp(vt/2) dW_{1t} + J_{1t} dN_{1t} \quad (26)$$

$$dv_t = \left[k(\bar{v} - vt) - \bar{\mu}_{2,t} \lambda_1(S_t) \right] dt + \sigma(S_t) dW_{2t} + J_{2t} dN_{2t} \quad (27)$$

$$ds_t = (1 - 2S_t) dN_{2t} \quad (28)$$

donde v_t y s_t son el estado de la volatilidad y el régimen de estado, respectivamente. El estado de régimen es 0 y 1. W_{1t} y W_{2t} son los movimientos brownianos estándar con correlación $\rho(s_t)$. N_{1t} y N_{2t} son procesos de Poisson

con intensidades $\lambda_1(s_t)$, $\lambda_2(s_t)$ respectivamente. A continuación se supone que la escala de los saltos es en proporción a la volatilidad del componente de difusión del proceso. Esto es, J_{1t} y J_{2t} son variables bivariadas normales:

$$J_{1t} / \exp(v_t / 2) : N(\mu_{1J}, \sigma_{1J}^2), J_{2t} / \sigma(s_t) : N(\mu_{2J}, \sigma_{2J}^2) \quad (29)$$

con

$$\text{Corr}^7(J_{1t}, J_{2t}) = \rho_J \quad (30)$$

Es decir, $J' = (J_{1t}, J_{2t})$ es un vector aleatorio de dimensión 2 con $\mu_{1J} = E(J_{1t})$, $\mu_{2J} = E(J_{2t})$, $\sigma_{11} = \text{Var}(J_{1t})$, $\sigma_{22} = \text{Var}(J_{2t})$ y $\rho_{12} = \text{Corr}(J_{1t}, J_{2t})$. Así, la matriz de varianzas-covarianzas está dada por:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\det(\Sigma) = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \rho_{12}^2\sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho_{12}^2) \quad (32)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(J_{1t}, J_{2t}) &= (2\pi)^{-1} \left\{ \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho_{12}^2) \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (J - \mu)' \Sigma (J - \mu) \right\} \\ (J - \mu)' \Sigma^{-1} (J - \mu) &= \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \left\{ \left(\frac{J_{1t} - \mu_{1J}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{J_{2t} - \mu_{2J}}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{J_{1t} - \mu_{1J}}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{J_{2t} - \mu_{2J}}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

En este caso, es importante recordar que para generar variables aleatorias normales bivariadas con $X : N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y : N(\mu_y, \sigma_y^2)$, con correlación entre X y Y dada por ρ se generan dos variables normales independientes Z_1 y Z_2 y se utiliza la transformación:

$$X = \sigma_x Z_1 + \mu_x \quad (34)$$

$$Y = \sigma_y [\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2] + \mu_y \quad (35)$$

⁷ Si $\text{corr}(J_{1t}, J_{2t}) = \rho_J$ es cero, entonces $f(J_{1t}, J_{2t}) = f(J_{1t})f(J_{2t})$ y J_{1t} y J_{2t} son independientes.

Como se mencionó antes, dado que el estado de régimen es 0 ó 1, entonces

$$\begin{array}{ll}
 s_t = 0 & s_t = 1 \\
 dN_t = 1 & dN_t = 1 \\
 ds_t = (1 - 2(0)) & ds_t = (1 - 2(1)), \\
 ds_t = 1 & ds_t = -1 \\
 & s_t = 0
 \end{array} \quad (36)$$

Por lo que si $s_t = 1$ entonces s_t vuelve a su estado inicial $s_t = 0$. Para estimar el parámetro k del modelo, se emplea el método generalizado de momentos MGM, como en la implementación de modelo de Vasicek (1977) de tal forma que

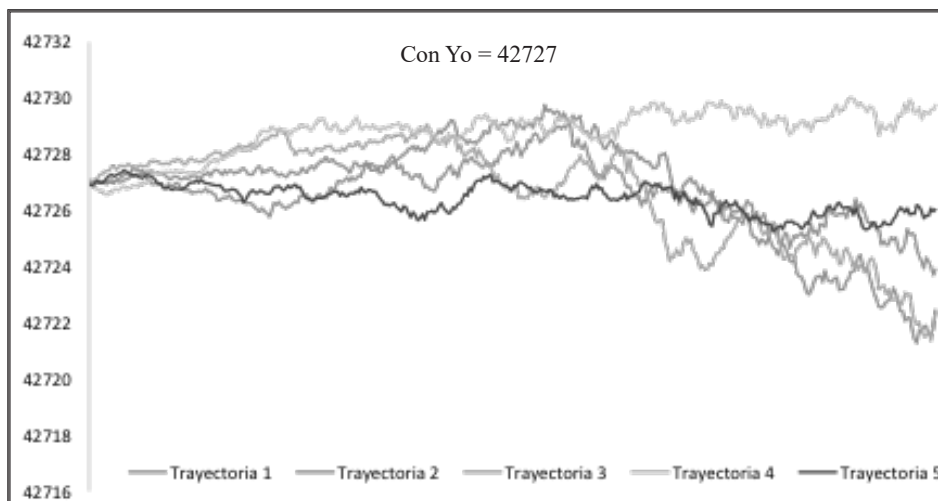
$$a = 1 - \beta_1 \quad y \quad b = \beta_0 / a \quad (37)$$

con lo cual se obtiene $k = 0.8$. En cuanto al número de saltos promedio se tiene que después de calcular tres desviaciones hacia arriba y tres hacia abajo, los valores que queden fuera se consideran como saltos. El número total de saltos que se obtiene durante el periodo 2004-2013 que comprende 10 años es de 114 saltos y para calcular el parámetro de intensidad se utiliza $\lambda = \# \text{ saltos/años}$, lo cual conduce a $\lambda = 114/10 = 11.4$.

4. Análisis comparativo de metodologías

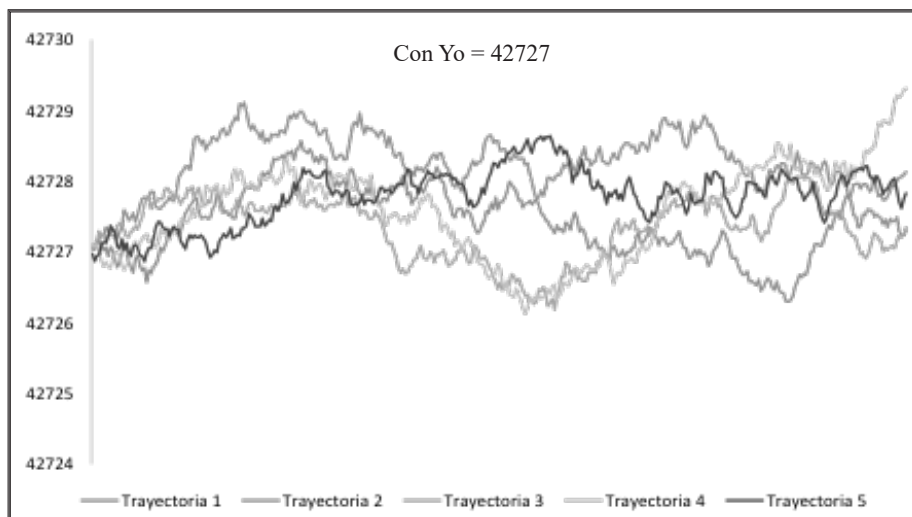
Se realizaron 1000 simulaciones para cada modelo, tanto para el modelo PJ-RS-SV, gráfica 9, como para el EGARCH, gráfica 10, y uno de promedios con fines comparativos. Por cuestiones ilustrativas, sólo se muestran cinco de las mil simulaciones con $S_0 = Y_0$.

Gráfica 9
Simulaciones PJ-RS-SV



Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

Gráfica 10
Simulaciones EGARCH

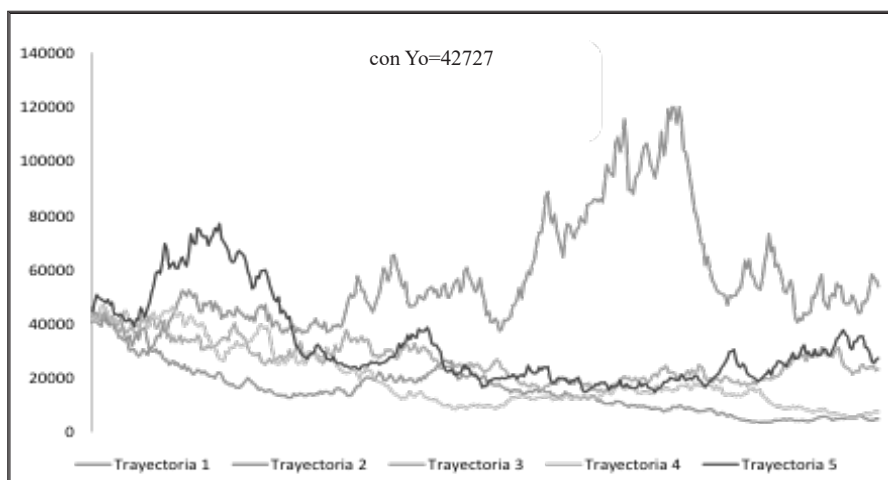


Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

En el cuadro 11 se muestra el promedio de las simulaciones cuando $S_0 = Y_0 = 42727$.

Es importante resaltar que en la gráfica 11, la trayectoria del modelo PJ-RS-SV captura los efectos de curtosis y asimetría de forma más realista en cuanto a su signo. En el cuadro 12 se muestra la comparación del último dato del año 2013 que sirve como base para comparar los modelos. De esta manera, se puede saber que tanto se dispersan los datos simulados de los observados. El modelo PJ-RS-SV captura de forma muy cercana el promedio de la serie original.

Gráfica 11
Simulaciones promedios



Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

Cuadro 11
Comparación estadística (2004-2013)

| Parámetros | IPC | PJ-RS-SV | EGARCH | Promedio |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Promedio | 27848.1817 | 42727.616 | 42727.6598 | 43070.7342 |
| Desviación | 2218.21003 | 1.10100793 | 0.71107141 | 16294.0126 |
| Sesgo | 0.23033956 | -0.23102769 | 0.00529737 | 0.59824274 |
| Kurtosis | -0.51126228 | -0.20377642 | -0.62263529 | -0.12429337 |

Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

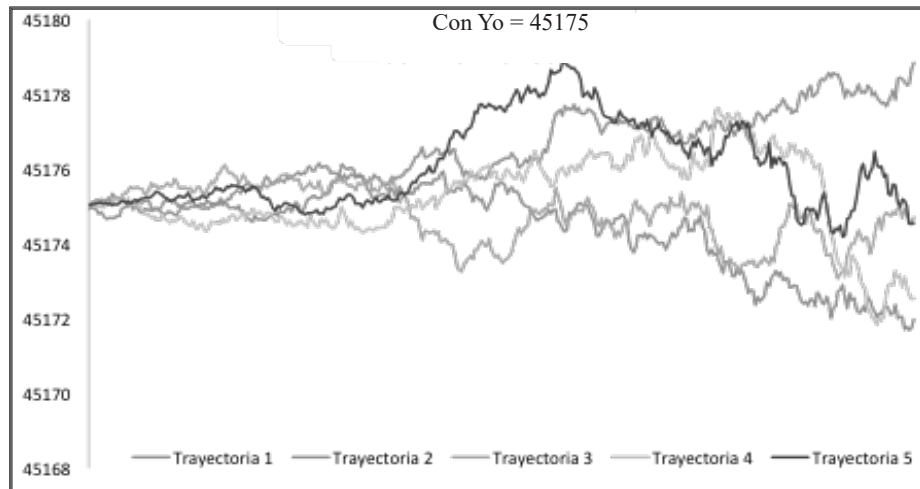
Cuadro 12
Comparación estadística 2013

| Parámetros | IPC | PJ-RS-SV | EGARCH | MEDIA |
|------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| Promedio | 41931.9365 | 42726.5497 | 42727.9317 | 33106.0734 |
| Desviación | 1802.92658 | 1.53006576 | 0.77628468 | 14840.0837 |
| Sesgo | 0.31524091 | -0.31188462 | 0.4002069 | 0.85306318 |
| Kurtosis | -0.54557714 | -1.11771254 | -0.44608512 | 0.12743968 |

Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

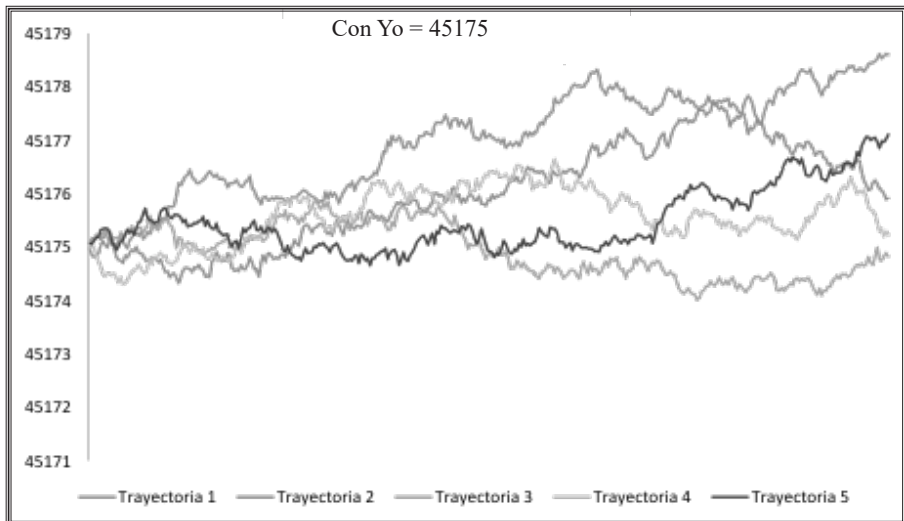
Las siguientes simulaciones se realizaron con $S_0 = Y_0 = 45175$. Conviene señalar que el modelo PJ-RS-SV tiene la capacidad de capturar los efectos de asimetría y los cambios estructurales de forma muy parecida a los de la serie original del IPC.

Gráfica 12
Simulaciones SJ-RS-Vol



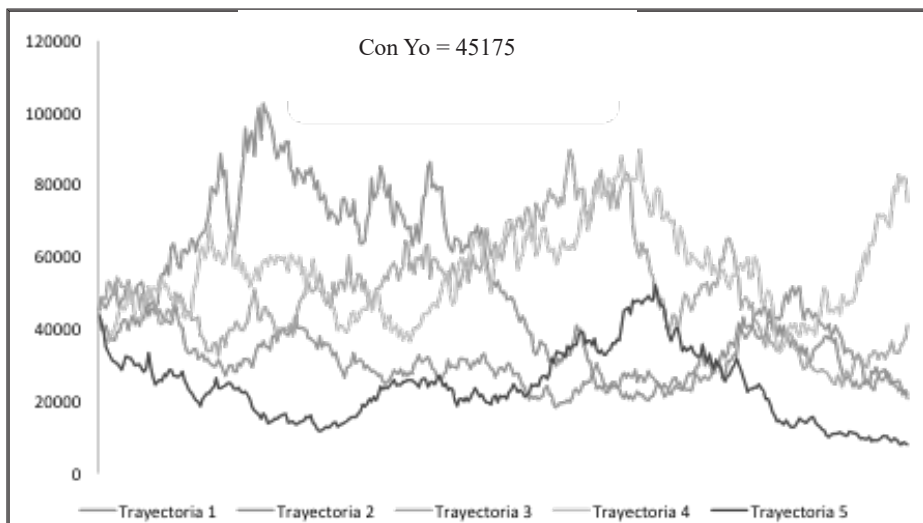
Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

Gráfica 13
Simulaciones EGARCH



Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos

Gráfica 14
Simulaciones promedios



Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

Se observa que además de replicar las propiedades estadísticas el modelo *PJ-RS-SV* muestra que cuando hay *clusters* de volatilidad, los precios se incrementan y esto es a causa de la asimetría capturada. De acuerdo con el cuadro 13, si se compara el último dato del 2015 frente a la simulación del periodo 2004-2013 se sigue manteniendo el signo de la kurtosis mostrando la bondad del modelo.

Cuadro 13
Comparación estadística (2004-2013) vs 2015

| Parámetros | IPC | PJ-RS-SV | EGARCH | MEDIA |
|------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| Promedio | 27848.1817 | 45175.6327 | 4575.7238 | 43838.7565 |
| Desviación | 2218.21003 | 1.07932959 | 0.7266905 | 16648.5701 |
| Sesgo | 0.23033956 | -0.21757269 | 0.0118007 | 0.61746069 |
| Kurtosis | -0.51126228 | -0.19061032 | -0.60921848 | -0.0679416 |

Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

Finalmente se muestra en el cuadro 14 que aun cuando se simulan trayectorias para el año 2015, los promedios se dispersan menos y el modelo *PJ-RS-SV* proporciona pronósticos muy cercanos a los valores observados de la serie IPC.

Cuadro 14
Comparación estadística 2015

| Parámetros | IPC | PJ-RS-SV | EGARCH | MEDIA |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Promedio | 45177.1756 | 45177.1396 | 45176.9799 | 35401.4434 |
| Desviación | 0.86937748 | 0.98363758 | 1.2140184 | 10271.7547 |
| Sesgo | 0.31524091 | -0.3425644 | -0.25519081 | -0.14832154 |
| Kurtosis | -0.84557714 | -0.83567419 | -0.89772064 | -1.46728657 |

Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

5. Conclusiones

Mediante la generación de saltos más grandes cuando la volatilidad es alta, el modelo *PJ-RS-SV* es capaz de proporcionar dinámicas más realistas. El

motivo principal al que se atribuye este comportamiento es que los saltos son casi idénticos al comportamiento de los rendimientos del IPC, entonces se pueden capturar las caídas y auges dentro de la serie. Las expectativas de la volatilidad futura de la volatilidad y el efecto de apalancamiento son diferentes dependiendo del régimen actual. La volatilidad estimada de los parámetros de volatilidad son 0.084 para estado 0 frente a 0.133 para el estado 1 en el modelo PJ-RS-SV.

Este trabajo fue desarrollado básicamente a partir de la propuesta de Durham y Park (2013), la cual es básicamente es un modelo de volatilidad estocástica que incorpora cambios de régimen que permiten cambios estocásticos en los parámetros que rigen la volatilidad de la volatilidad. Para ello, a una ecuación de media se le introduce un proceso de volatilidad con saltos, pero dichos saltos dependen de la volatilidad. El modelo PJ-RS-SV para el caso aplicado al mercado accionario mexicano tiene un buen desempeño.

Conviene mencionar que el modelo PJ-RS-SV con saltos tiene mejores resultados que aquellos sin saltos, lo que sugiere que está en mejores condiciones para capturar la falta de no-normalidad en los rendimientos y las innovaciones de la volatilidad observadas en los datos. El modelo PJ-RS-SV, en particular, como herramienta es sumamente útil por su capacidad de replicar las propiedades estadísticas. Por ejemplo se capturan los cambios de régimen que no se observan en otro modelo como el EGARCH, el cual se concentra en la volatilidad de los rendimientos y aunque de alguna forma no es posible hacer completamente una comparación, el EGARCH útil para parametrizar el tamaño de los saltos con la volatilidad de los mismos.

Como recomendación final, se pueden hacer extensiones al modelo en varias direcciones: por ejemplo; modelar el tamaño de cada salto con funciones de valores extremos. Otra vertiente puede ser que incluir saltos de Poisson contaminados con procesos de Levy, los cuales podrían emplear subordinadores o relojes brownianos. El código utilizado⁸ está escrito en Visual Basic y la simulación para cada modelo tardó aproximadamente 30 minutos en arrojar resultados.

⁸ El código puede ser compartido al solicitarlo a cualquiera de los correos de los autores.

Referencias

- Andersen, T. G. (1996). "Return volatility and trading volume; an information flow interpretation of stochastic volatility". *Journal of Finance*, vol. 51, No. 1, pp. 169-204.
- Aranda, R. F. y L. Pizarro-S. (2012). "Pronósticos de volatilidad y cambios de régimen en el mercado financiero chileno GARCH" versus MRS-GARCH. Universidad de Santiago de Chile. [En línea] Disponible en: <http://www.economia.usach.cl/index.php/documentos-de-trabajo> [Último acceso: 18 02 2014].
- Bai, X. J. C. Russell and G. C. Tiao (2001). Kurtosis of GARCH and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics*, vol. 114, No. 2, pp. 349-360.
- Banxico (2009). "Reporte sobre el sistema financiero. México", p. 208, Disponible en: <http://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-discursos/publicaciones/informes-periodicos/reporte-sf/%7B5286741D-A39E-9745-B393-AF3DF0A5AE85%7D.pdf> <http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF103§or=7&locale=es>.
- Bäuerle, N., and U. Rieder (2011). *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. London: Springer and Business Media. Recuperado el 18 de 10 de 2014, de www.springer.com.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *The Journal of Political Economy*, vol. 81, No.3, pp. 637-654.
- Black, F. (1976). "Studies of stock price volatility changes". *American Statistical Association, Business and Economics Section*, pp. 177-181.
- BMV (2012). "Nota metodológica del Índice de Precios y Cotizaciones IPC". México, DF. Disponible en: http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_repositorio/_rid/223/_mto/3/MetodologiaIPCvers11deabril.pdf [Último acceso: 22 02 2014].
- Bodie, Z. and R. C. Merton (1999). *Finanzas*. México: Prentice Hall, pp. 464.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity". *Journal of Econometrics*, vol. 31, No. 3, pp. 307-327.
- Broxson, B. J. (2006). *The Kronecker product*. UNF Theses and Dissertations. Paper 25. [en línea] disponible en: <http://digitalcommons.unf.edu/etd/25> [Último acceso: 22 02 2014].
- Christoffersen, P. K. Jacobs and M. Mimouni (2010). "Models for S&P500 dynamics: evidence from realized volatility, daily returns, and option prices". *Review of Financial Studies*, vol. 23, No. 2007-37 pp. 3141-3189.
- Cruz-Aké, S. P. López-Sarabia y F. Venegas-Martínez (2011) "Volatilidad financiera y sistema bancario durante la crisis 2007-2009". *Investigación Económica*, vol. 70, núm. 276, pp. 89-124.

- Durham, G., and Y. H. Park (2013). "Beyond stochastic volatility and jumps in returns" and volatility. *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 31, No. 1, pp. 107-121.
- Cheng, D. F. K. W. R. Ho, I. Hu and R. H. Wang (2012). "Option Pricing with Markov Switching". *Journal of Data Science*, No. 10, pp. 483-509.
- González, A. (2008). "Análisis Empírico de la Volatilidad Estocástica y Saltos para Modelos en Tiempo Continuo de Índices Bursátiles utilizando el EMM". Universidad del país Vasco [En línea] Disponible en: https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=forofinanzas2008&paper_id=103.
- González-Aréchiga, B.; J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. 10, núm. 2, pp. 259-290.
- Granger, C. W. (1980). "Long memory relationships and the aggregation of dynamics models". *Journal of Econometrics*, vol. 14, No. 2, pp. 227-238.
- Grajales-Correa, C. A., F. O. Pérez-Ramírez y F. Venegas-Martínez (2008). "Análisis comparativo de modelos para estimar la distribución de la volatilidad de series financieras de rendimientos". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, vol. 6, núm. 9, pp. 1-29.
- Greene, W. H. (2000). *Econometric Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Guerrero-Guzmán, V. M. (2009). *Análisis estadístico y pronóstico de series de tiempo económicas*. 3a. ed. México, DF., ed. Jit Press. p. 395.
- Fama, E. F. (1965). "The behavior of stock market prices". *Journal of Business*, vol. 28, No. 1, pp. 34-105.
- Hamilton, J. D. (1989). "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle". *Econometrica*, vol. 57, núm. 2, pp. 357-384.
- Hansen, B. E. (1992). The likelihood ratio test under nonstandard conditions: testing the Markov switching model of GNP. *Journal of Applied Econometrics*, vol. 7, No. S1 pp. 561-582.
- Harvey, A. C.; E. Ruiz and N. Shephard (1994). "Multivariate stochastic variance models", *Review of Economic Studies*, vol. 61, No. 2, pp. 247-264.
- Harvey, A. C., and N. G. Shephard (1996). The Estimation of an Asymmetric Stochastic Variance Model for Asset Returns. *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 14, No. 4, pp. 429-434.
- Johnson, T. C. (2002). "Volatility, momentum, and time-varying skewness in foreign exchange returns". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 20, No. 3, pp. 390-411.
- Jones, C. (2003). "The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets". *Journal of Econometrics*, vol. 116, No. 1, pp. 181-224.

- López-Herrera, F. (2004). Modelado de la volatilidad y pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y Administración*, vol. 49, núm. 213, pp. 43-72.
- MexDer (2004). "Nota metodológica del Índice VIMEX", México, DF. Disponible en: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/_vtp/MEX/1f0a_vimex/_rid/21/_mto/3/VIMEX_metodologia.pdf.
- Nelson, D. B. (1991). "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach". *Econometrica*, vol. 59, No.2, pp. 347-370.
- ____ (1990). "Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model". *Econometric Theory*, vol. 6, No. 3, pp. 318-334.
- Novalés, A. (2013). "Volatilidad. Madrid: Universidad Complutense". Disponible en: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/ecocuan/anc/ectriaqf/Volatilidad.pdf>.
- Rincón, L. (2012). "Introducción a los procesos estocásticos". México: Facultad de Ciencias UNAM. Recuperado el 17 de 10 de 2014, de <http://www.matematicas.unam.mx/lars>.
- Santa-Clara, P., S. and Yan (2010). "Crashes, volatility, and the equity premium: lessons from S&P 500 options". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 92, No. 2, pp. 435-451.
- Tauchen, G. E., and M. Pitts. (1983). "The price variability-volume relationship on speculative markets". *Econometrica*, vol. 51. No. 2, pp. 485-505.
- Taylor, S. J. (1994). "Modeling stochastic volatility: a review and comparative study". *Mathematical Finance*, vol. 4, No. 2, pp. 183-204.
- ____ (1986). *Modelling financial time series*. John Wiley, Chichester.
- Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure". *Journal of Financial Economics*, vol. 5, No. 2, pp. 177-188
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano". *Momento Económico*, núm. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- ____ (2000). "Utilidad, aprendizaje y estabilización". *Gaceta de Economía*, Año 5, núm. 10, pp. 153-169.
- ____ (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- ____ (2006). "Stochastic temporary stabilization: undiversifiable devaluation and income risks". *Economic Modelling*, vol. 23, No. 1, pp. 157-173.
- Venegas-Martínez, F., S. Medina Hurtado, J. A. Jaramillo y F. H. Ramírez Atehortúa (2008). *Riesgos financieros y económicos*. Universidad de Medellín, Colombia.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición. Cengage Learning. Mexico.