https://doi.org/10.29201/peipn.v13i26.351
-ISSN-1870-2171

PANORAMA ECONÓMICO, vol. XIII, 26, enero-junio de 2018, pp. 1-20

Economía, geometría y dinámica

Elvio Accinelli*

(Recibido: septiembre 2017/Aceptado: febrero 2018)

Resumen

El presente trabajo pretende mostrar cómo la geometría diferencial y los sistemas dinámicos permiten entender, explicar y avanzar en el estudio de problemas económicos relevantes. Pretendemos convencer al lector de que una teoría formalmente desarrollada puede no estar muy lejos de la práctica más inmediata y que, por otra parte, los problemas que la realidad cotidiana nos plantea pueden ser un excelente pretexto para dedicarnos a la más abstracta teoría.

El artículo está destinado a un amplio público, en particular a las personas interesadas en la Teoría Económica y particularmente en la Economía Matemática. No obstante, aspiramos a que, matemáticos y economistas provenientes de áreas diferentes, encuentren en él, un incentivo para futuros estudios en la temática. Esperamos que el objetivo declarado no esté muy lejos de los resultados alcanzados.

Palabras claves: equilibrio walarasiano, dinámica del subastador, variedad de equilibrios.
Clasificación JEL: D5; C61; C62.

* El autor desea agradecer al M. en C. Ricardo Hernández Medina por su apoyo para la edición del presente documento y a la Maestra Mara del Huerto Bettini por la corrección de la redacción. Facultad de Economía, UASLP México. Correo electrónico: elvio.accinell@eco.uaslp.mx

Economy, geometry and dynamics

Abstract

The present work tries to show how the differential geometry and the dynamic systems allow to understand, explain and advance in the study of relevant economic problems. We try to convince the reader that a formally developed theory may not be very far from the most immediate practice and that, on the other hand, the problems that everyday reality poses to us can be an excellent pretext to devote ourselves to the most abstract theory. The article is intended for a wide audience, particularly those interested in Economic Theory and particularly in Mathematical Economics. However, we hope that mathematicians and economists from different areas will find in it an incentive for future studies on the subject. We hope that the declared objective is not far from the results achieved.

Keywords: walarasian equilibria, dynamics of the auctioneer, equilibrium manifold.
JEL classification: D5; C61; C62.

1. La economía

Si bien podemos ubicar los orígenes de la economía matemática en fechas más tempranas, han sido los trabajos de Gerard Debreu de 1959 los que pusieron los cimientos de esta ciencia en su elegante e inspiradora forma actual.

Gerard Debreu, así como sus tempranos seguidores, se plantearon como objetivo central de sus investigaciones, resolver un problema aparentemente muy simple y supuestamente muy desligado de las vicisitudes económicas diarias de las personas. Se trataba de probar, rigurosamente, esto es, de manera lógicamente correcta, la existencia de soluciones para una ecuación que, formalmente, podría expresarse como $z(p)=0$. Si la respuesta era afirmativa, debíase entonces caracterizar el comportamiento de estas soluciones, su unicidad y sus propiedades matemáticas principales.

Resolver esta ecuación, equivaldría a dar una respuesta formalmente correcta a la interrogante de la existencia de los precios de equilibrio. Este problema, fue planteado originalmente por León Walras quien, si bien lo hizo utilizando un sistema de ecuaciones correcto, no disponía en su época del instrumental matemático necesario para obtener una respuesta definitiva. Sin duda, esta ecuación representa el problema fundamental de la teoría económica. Esto es, responder a la pregunta sobre la existencia de los precios de equilibrio. En realidad, no se trata de una única ecuación, sino de un sistema de ecuaciones, una para cada bien existente en la economía, con igual número de incógnitas, las que corresponden a los precios unitarios de cada bien.

A continuación trataremos de explicar cómo se llega a este sistema de ecuaciones, que expresa matemáticamente el problema central de la economía. Es decir, mostraremos los sustentos económicos que nos llevan a esta formulación matemática de un problema que nace de la realidad económica. Asumiremos, para simplificar nuestro análisis, que en la economía no hay producción, esto es, los agentes económicos son exclusivamente consumidores que intercambian productos en el mercado para obtener un mejor pasar. Estos modelos económicos se denominan de intercambio puro.

Consideramos que hay n agentes o consumidores. Cada uno de ellos quedará representado por un índice i. Por lo que i tomará valores enteros entre 1 y n. En tanto que, como veremos, es la distribución de la riqueza de un país entre sus ciudadanos, la que determina los precios que regirán en el mercado, los economistas suelen caracterizar a las economías precisamente por la distribución de la riqueza entre los ciudadanos si se trata de un país, o en general entre los agentes económicos. Supondremos que la riqueza es de propiedad privada y, por lo tanto, el total de la riqueza existente en la sociedad es la suma de las riquezas individuales. Indicaremos por w_i la riqueza inicial (antes de realizar cualquier intercambio), del i- ésimo agente, tomando i como ya dijimos, cualquier valor en el conjunto $I = \{1,...,n\}$. Cabe señalar que la riqueza de cada individuo se compone por una lista de bienes de su propiedad, entendiendo por ello, no sólo aquellos objetos tales como casas, autos o naranjas, sino también, la capacidad de brindar servicios, realizar determinado tipo de tareas, etc., en general, todo aquello que pueda ser intercambiado en el mercado por otros bienes. Por lo tanto, los bienes de una economía suelen ser muchos, digamos que esta cantidad la representamos por l.

La riqueza que, en un momento determinado, cada agente tiene será representada por una lista de números $w_i = (w_{i1}, w_{i2},...,w_{il}\}$, indicando cada uno de ellos la cantidad que, de cada bien, cada agente dispone. Así cada w_{ij} representa la cantidad de unidades que el agente i- ésimo dispone del j-ésimo bien. Obviamente hay algunos bienes de los que el individuo no dispone, a esos le asignamos el cero en la lista de sus bienes. Por lo que la mayoría de estas cantidades, en dicha lista, será igual a cero. Luego, el total existente en la sociedad del ésimo bien, será representado por W_j y corresponde a la suma de lo que cada agente dispone de ese bien, así, $W_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}$. La existencia total, inicial de cada bien en la economía será representada por la lista, $W = (W_1, W_2,..., W_1)$, siendo l, la cantidad de bienes diferentes presentes en el mercado en un momento dado.

Mediante el símbolo $x_{ij}(p)$ representamos la cantidad del bien j que el i-ésimo consumidor desearía obtener como resultado del intercabio de bienes en el mercado. Se denomina la demanda del ésimo agente, por el j-ésimo bien. Por $X_j(p)$ representaremos la demanda agregada por este bien cuando rigen los precios p es decir, que $X_j(p) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(p)$. Observe el lector que por p representamos una lista de precios, $p = (p_1, p_2,..., p_1)$ un precio unitario para cada bien. Una vez realizado los intercambios el i-ésimo agente, quien inicialmente posea una cesta $w_i = (w_{i1}, w_{i2},..., w_{il})$ la habrá intercambiado por otra cesta de bienes a la que podemos representar por $x_i = (x_{i1}, x_{i2},..., x_{il})$ y que es prefierida a la anterior. Ciertamente, cual sea esta cesta dependerá de las preferencias del agente, de su riqueza inicial y de los precios que rijan en el mercado.

Entendemos por exceso de demanda agregada por el j-ésimo bien, la suma de todo lo que los agentes demandan a precios dados, menos la oferta total o agregada del bien. Representaremos este número por $Z_j(p)$, indicando de esta forma la dependencia de los precios antes mencionada. Podemos escribir entonces la igualdad, $Z_j(p) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(p) - \sum_{i=1}^{n} w_{ij} = X_j(p) - W_j$. Denominaremos, en general, exceso de demanda, a la lista de l números $Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p),..., Z_1(p))$, esto es, la lista que corresponde al exceso de demanda por cada bien. Como queda claro entonces, el exceso de demanda hace corresponder a cada sistema de precios p una lista de l números reales, uno por cada mercado. Los positivos, corresponden a un exceso de demanda sobre la oferta existente del bien correspondiente, es decir a los precios p los agentes demandan más de ese bien de lo que la sociedad ofrece del mismo. En caso de ser negativo tenemos que a esos precios, en el mercado correspondiente se produce un exceso de oferta, esto es a esos precios los agentes no están dispuetos a demandar, todo lo que la sociedad ofrece. Si fuera cero, la oferta y la demanda, por el bien en cuestión, se igualan en el mercado. Por lo tanto, la ecuación para la cual buscábamos al inicio una solución $Z(p)=0$ corresponde a l ecuaciones $Z_1(p) = 0$, $Z_2(p) = 0$,..., $Z_1(p) = 0$, con l incógnitas (pues p es una lista de precios unitarios, uno para cada bien, $p =(p_1, p_2,..., p_1)$).

La interrogante inicial corresponde entonces, a saber si existe una solución, para este sistema de ecuaciones, es decir, si existe un sistema de precios de equilibrio.

En tanto que los valores que z asume, dependen de p ella es función de los precios. La llamaremos función exceso de demanda, que se compone de dos sumandos (un minuendo y un sustraendo). La demanda agregada de cada uno de los bienes y por otro la oferta agregada de cada bien. Por lo tanto, un sistema de precios p que haga que esta función tome el valor cero, representa un sistema de precios de equilibrio, es decir: precios bajo los cuales, lo que los agentes demandan en el mercado de cada bien, se iguala a la oferta total de cada uno de estos bienes.

El valor de la riqueza que cada agente posee inicialmente, dependerá de los precios vigentes en la economía. Cuando rijan los precios unitarios $p=(p_1, p_2, \ldots, p_1)$ tendrá un valor igual a $\sum_{j=1}^{l} p_j w_{ij}$. Es decir, el valor de la riqueza inicial de cada agente, $i=\{1,2,\ldots,n\}$, estará dado por $pw_i = p_1 w_{il} + \ldots + pw_{il}$ esto es, la suma de los productos de los precios unitarios de cada bien por la cantidad de unidades que de ese bien posee el agente económico. Obsérvese que cada agente no podrá adquirir en el mercado cestas de biene $y=(y_1,\ldots,y_1)$ de valor superior al de su cesta inicial, es decir eligirá una cesta aquella que más le guste, en total un conjunto de cestas cuyo valor no supere al de su riqueza inicial.

El sistema de ecuaciones $Z(p) = 0$ cuya solución se pretende encontrar, no es necesariamente lineal, pues la demanda de cada agente es el resultado de un programa de optimización con restricciones, los agentes buscarán en el mercado aquella cesta de bienes que prefieran, limitados, ciertamente, por el valor de la riqueza de que disponga en el momento de hacer las transacciones comerciales. Por lo que, al menos en principio, no hay forma de garantizar la existencia de la solución de dicho sistema de ecuaciones.

Pero es de mencionar que, si ella no existiera, la teoría económica moderna no tendría sentido, o por lo menos, no tendría mucho que decir. Afortunadamente, G. Debreu en 1959 mostró que bajo condiciones muy generales, existe para cada distribución posible de la riqueza, al menos, un equilibrio, es decir, un sistema de precios p que resuelve el sistema de ecuaciones indicado. Este resultado, originalmente obtenido por León Walras pero en forma parcial y más intuída que probada, fue definitivamente probado por G. Debreu, y sus consecuencias analizadas por economistas posteriores. Obsérvese que a los precios de equilibrio se realizarán en el mercado, todos los intercambios posibles, sin que sobre ni falte nada.

Como ya indicamos, cada economía puede representarse por una *lista de listas* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ que hace referencia a la distribución inicial (antes de las transacciones) de la riqueza entre los integrantes de la sociedad. Cada elemento w_i de esta súper lista indica la riqueza que cada agente tiene antes de ir a realizar sus intercambios en el mercado, es decir $w_i=(w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{il})$ tomando i valores entre 1 y n. De esta forma, cada economía caracterizada por su distribución de la riqueza w, tendrá una determinada función Z a la que representaremos por Z_w y como puede observarse, esta distribución determinará el conjunto de precios de equilibrio posibles de ser alcanzados por al economía de forma descentralizada. Representaremos a este conjunto, usando un poco más de notación matemática, por el simbolismo.

$$Eq_w = \{p \in R^l_{++} : Z_w(p) = 0\} = Z^{-1}(0). \tag{1}$$

Por R^l_{++} entendemos todas las listas posibles de l-números estrictamente positivos (es natural suponer que los precios unitarios de cada bien son positivos). Obsérvese que es natural suponer que la demanda de bienes depende de la distribución de la riqueza entre los agentes económicos y como lo que buscamos son los ceros de la correspondiente función exceso de demanda, es natural suponer que éstos dependan de la distribución de la riqueza.

Usamos el término descentralizada, o autorregulada, para expresar el hecho de que nadie en particular determina los precios de equilibrio, ni cómo se llega a ellos. Se alcanzan como resultado de los intercambios que los agentes económicos realizan en el mercado, sin intervención de ningún factor ni agente externo. En homenaje a León Walras, denominaremos a estos precios de equilibrio walrasianos, y al par formado por una lista de cestas $x(p)=(x_1(p),x_2(p),\ldots x_n(p))$ (una cesta para cada consumidor) y una lista de precios p que correspondan a una solución de la ecuación $Z(p) = 0$ le llamaremos equilibrio walrasiano.

2. La geometría

Observemos entonces que podemos escribir la ecuación $Z_w(p) = Z(w,p) = 0$ entendiendo que hemos fijado la distribución inicial de la riqueza en w y obtenemos los precios p de equilbrio correspondientes a la economía representada por esta distribución. Es decir que para cada distribución inicial de la riqueza tendremos una ecuación fundamental. Si bien, G. Debreu prueba la existencia de (al menos) una solución para la ecuación fundamental para (casi) cualquier distribución inicial de la riqueza, no está claro bajo qué condiciones existe una única solución (lo que sería deseable para todo economista), es más, en general existe más de una.

De acuerdo con los resultados matemáticos a los que el desarrollo del modelo económico nos conduce, (proceso cuyo desarrollo explícito le obviamos al lector para no aburrirlo con demasiados cálculos), cuando tenemos una economía con l bienes, alcanza con encontrar los precios de equilibrio correspondientes a l-1 mercados, el restante mercado quedará en equilbrio automáticamente. Esto es resultado de las propiedades de la función exceso de demanda (véase H. Varian). Por lo que, los posibles equilibrios de una economía con dos bienes, pueden encontrarse a partir de resolver una única ecuación del tipo $Z(p)=0$. Esta observación nos permite obtener una representación simple, pero fiel, de lo que ocurre en una economía con dos bienes, para la cual, por lo tanto bastará considerar un único mercado.

Si bien, un modelo con dos bienes parece trivial, no lo es tanto y existen buenos ejemplos de economías con estas características. Muchos modelos de comercio internacional toman la siguiente forma: Sean A y B dos países, ellos representan nuestros agentes económicos, que comercian entre sí dos bienes, por ejemplo, café y trigo. Supongamos que nos encontramos en el mercado del café. El grano es más abundante en el verano, decae en el otoño, hasta llegar al invierno en su menor existencia y repunta en primavera. Representamos por w la cantidad existente del grano (la riqueza de la economía).

En la figura 1 hemos indicado la gráfica de $Z(w,p)=0$. Por ejemplo, cuando la cantidad de café en el mercado es $w_1 < w_a$ el precio de equilibrio (oferta=demanda) posible es p_1 (es decir un precio ubicado en la rama superior del grafo), mientras que, para el caso en que $w_2 > w_b$ el único precio posible será $p_2 < p_1$ un precio ubicado en la rama inferior del grado). Hasta aquí está claro, pues el precio es más alto cuando la oferta es poca y más baja, cuando es mucha. No obstante, observe el lector que hay un sector de la figura 1, el comprendido entre w_a y w_b. donde hay tres posibles precios de equilibrio para cada distribución w, veremos que la dinámica de Samuelson nos permite decir algo sobre ellos.

También tenemos dos casos un poco *raros*, por su comportamiento, que corresponden a $w = w_a$ y w_b. Para ellos existen dos posibles equilibrios. Analizaremos esto con un poco más de cuidado más adelante. Si bien es cierto que las economías en general son más complicadas, pues en ellas existen muchos mercados, uno para cada bien, y muchos agentes intercambiando bienes, la figura 1 bien representa una economía con dos bienes y nos da una pista de lo que sucede en la realidad. Si la distribuición de la riqueza cambia, cambian los precios de equilibrio. Por otro lado, es cierto que, como se muestra en la figura 1, bajo condiciones muy amplias del modelo, en general, a cada distribución del ingreso le corresponderá un número impar de precios de equilibrio y sólo a un grupo muy pequeño una cantidad par (los casos raros antes mencionados).

El grafo indicado en la figura 1, se denomina variedad o hipersuperficie walrasiana de equilibrio. En el ejemplo tendremos una *curva* (caso particular de hipersuperficie en el plano) walrasiana de equilibrio. Los trabajos pioneros que analizan el comportamiento de esta variedad son: Yves Balasko (1988) y (2009). Diremos que esta variedad determina la geometría de la economía. En el caso general, este conjunto de economías, caracterizadas cada una de ellos por sus respectivas distribuciones iniciales de la riqueza w, y los precios p de equilibrio correspondientes, forman lo que los matemáticos llaman una variedad diferencial. La que está conformada por el conjunto de pares (w,p) (distribución del ingreso y precios de equilibrio correspondientes) que resuelven el sistema de ecuaciones $Z(w,p) = 0$.

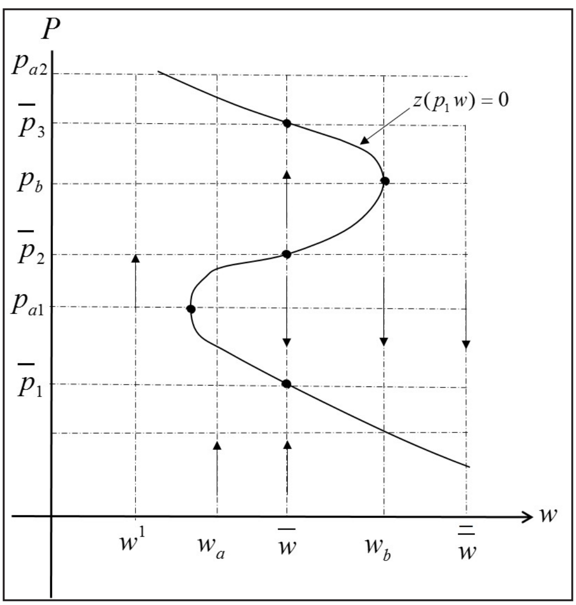


Figura 1
La geometría de Balasko $z\ (w,p) = 0$

Ahora bien, como resultado del intercambio de bienes que los agentes realizan en el mercado se obtienen los precios de equilibrio. Éste es resultado de la acción conjunta de todos los agentes económicos y de ninguno en particular. Este mecanismo es el que Adam Smith bautizó como *la mano invisible*, una metáfora creada por el filósofo y economista que expresa, la capacidad autorreguladora del libre mercado. Cuál es el mecanismo por el cual estos precios se establecen, es decir, cómo funciona la mano invisible, no está muy claro aún ahora para la teoría económica. Pero una vez alcanzados, la economía se ubicará en la variedad walrasiana de equilibrios.

Una vez que los precios de equilibrio se determinan, cada agente podrá obtener en el mercado una nueva cesta x_i de bienes que mejore su bienestar respecto a su cesta original w_i. El conjunto de cestas posibles de ser adquiridas en el mercado agente, dependerá de los precios de equilbrio, y éstos de la distribución inicial de la riqueza. Es decir que, la demanda del agente *i*-ésimo a precios *p* de equilibrio y dada la distribución inicial de la riqueza *w,* puede representarse por $x_i(p(w))$ debiendo verificarse que $px_i(p(w)) \leq pw_i$, desigualdad que expresa el hecho de que la cesta adquirida en el mercado, no tiene, a precios *p,* un valor mayor que el de su cesta inicial. Por lo que cuan rico un agente es, depende no sólo de su dotación inicial, sino también de los precios existentes en el mercado. Para los precios de equilibrio, se verifica necesariamente que $\sum_{i=1}^{n} x_i(p(w)) = \sum_{i=1}^{n} w_i$, observe el lector que esta igualdad representa *l* igualdades una para cada bien $W_j .=X_j(p(w))$. Esto es, un sistema de precios *p* es de equilibrio, si y solamente si, cuando tales precios rijan en el mercado, la demanda agregada igualará a la oferta agregada. Con un poco más de detalle cabe observar que, la demanda $x_i(p(w))$ de cada agente es, en realidad, la cesta de bienes que el agente prefiere entre todas las que puede adquirir. La representaremos por $x_i(p(w))=x_{i1}(p(w)),x_{i2}(p(w)), ...,x_{il}p(w))\}$ indicando cada $x_i(p(w))$ las unidades del bien $j=\{1,2,..., l\}$ que el consumidor demanda el agente *i*-ésimo y el valor de esta cesta está dado por el producto $px_i(p(w)) = p_1x_{i1}(p(w)) + p_2x_{i2}(p(w)) + ... + p_lx_{il}(p(w))$.

Note el lector que la demanda de cada bien no depende sólo del precio del bien en cuestión, sino también del precio de los otros bienes. Lo que se explicita escribiendo $x_{ij}(p)$ siendo $p = (p_1,p_2,..., p_l)$. La demanda por carros no depende sólo del precio del carro, sino también del precio de otros bienes, como por ejemplo la gasolina. Por otra parte compraremos un carro si primero podemos comprar otros bienes que necesitamos con mayor urgencia, si luego sobra, veremos si compramos el carro.

Utilizando esta notación podemos escribir $Z_w(p)=\sum_{i=1}^n x_i(p)-\sum_{i=1}^n w_i$, indicando por $x_i(p)$ la cesta que el agente i-ésimo desearía obtener en el mercado, cuando los precios vigentes están dados por p. La suma de todas ellas nos da la demanda agregada, mientras que $\sum_{i=1}^n w_i$ representa la oferta agregada. Los precios de equilibrio serán entonces aquellos para los que se verifica la igualdad.

$$Z_w(p)=\sum_{i=1}^n x_i(p)-\sum_{i=1}^n w_i=0$$

y como ya lo indicamos estos precios dependen a su vez de la distribución inicial de la riqueza *w.* Recuerde que esta igualdad representa un sistema de tantas ecuaciones e incógnitas como bienes hay en la economía y que un sistema de precios será de equilibrio si las resuelve a todas simultáneamente. Es decir, si en todos los mercados la demanda agregada es igual a la oferta agregada. En su forma desarrollada tendremos para cada bien una ecuación:

$$Z_{jw}(p(w))=\sum_{i=1}^n x_{ij}(p(w))-\sum_{i=1}^n w_{ij}=0 \text{ para cada } j\in\{1,2,\ldots,l\}$$

En equilibrio, las cosas parecen estar claras, los agentes intercambian sus bienes y los mercados se limpian (como las malas traducciones dicen y terminan por imponerse) pero, si los precios no fueran de equilibrio ¿qué ocurriría? La teoría económica no tiene aún una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Una primera respuesta es que no se completarán las transacciones pues de algunos bienes faltan y de otros sobran. La teoría económica actual no es capaz de describir una economía fuera del equilibrio. Sólo puede dar algunas intuiciones, pensando en que los precios deberían *converger* al equilibrio.

3. La dinámica

La dinámica es la mejor representación de este *proceso de convergencia*, desde cualquier sistema de precios al sistema precios de equilibrio, si es que tal proceso existe, es la presentada por Paul Samuelson en (1947), llamada dinámica del rematador. Originalmente descrita por León Walras (1874), pero, sin el formalismo matemático necesario para darle cierta utilidad a tal descripción. Samuelson describe este proceso, (por primera vez en 1944), a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales y hace uso de la teoría matemática de los sistemas dinámicos.

No obstante ser la mejor representación existente, distintas objeciones han prevalecido a esta dinámica por parte de los economistas. La más importante de ellas proviene del teorema de Debreu-Sonnenschein-Mantel, (véase Mantel, R., 1978), que hace referencia a la generalidad de la función exceso de demanda. Generalidad que hace imposible determinar el comportamiento del campo vectorial del sistema dinámico asociado al movimiento de los precios, el que, como veremos, está representado por la función exceso de demanda. Sólo bajo supuestos muy restrictivos para las economías, la dinámica de Samuelson

$$p_j = k_j Z_j(p), \text{ para cada } j \in \{1,2,\ldots,n\} \tag{2}$$

resulta justificable para representar la evolución temporal de los precios de las economías que se encuentran fuera del equilibrio, hacia el equilibrio. Por p_j representamos la modificación del precio del bien j a lo largo del tiempo. k_j es una constante positiva, que representa para cada $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ la velocidad de ajuste del sistema de precios. Como sabemos, Z_j es la función exceso de demanda (agregada) por el j-ésimo bien, para cada economía. Si quisiéramos ser más específicos, deberamos denotar a esta función por $Z_j(w,p)$ o bien como $Z_{jw}(p)$ indicando que ella representa la función exceso de demanda de la economía cuya distribución de riqueza es w.

A favor de esta dinámica podemos decir que resulta razonable para estudiar el comportamiento local de los equilibrios. Es decir, si más que en saber cómo se alcanzan los equilibrios estamos interesados en conocer cuán sensible es un equilibrio a perturbaciones pequeñas. Pero, no garantiza la convergencia al equilibrio original pues, en principio, una vez perturbado el equilibrio, la dinámica de Samuelson puede dar lugar a ciclos. No obstante, ofrece una explicación satisfactoria para el caso ya mencionado, de economías con dos bienes. Como veremos para estos casos ofrece una explicación razonable de la convergencia hacia el equilbrio.

La dinámica de Samuelson indica que el precio de cada bien se incrementa con el tiempo si la función exceso de demanda por este bien, es positiva, es decir, si hay más demanda que oferta, y disminuye cuando $z_j(p)$ es negativa, es decir cuando hay más oferta que demanda. El modelo parece simple e intuitivo, pero no siempre lo intuitivo es cierto. No entraremos en esta discusión. Al lector interesado en los pormenores de esta dinámica le recomendamos la lectura de Arrow-Hahn (1971).

Aunque más que para representar el movimiento de los precios desde una situación inicial de desequilibrio hasta una de equilibrio, como veremos, ella es mejor instrumento para clasificar los equilibrios en "buenos" (asintóticamente estables por su denominación matemática) y "malos" (inestables, por su denominación matemática). Es decir, para indicarnos lo que sucede cuando partimos de una situación de equilibrio, y por alguan razón ajena al modelo, los precios de equilibrio se ven perturbados.

Obsérvese que cuando alcanzamos un sistema de precios p tal que $Z_j(p^*)=0$ para todo $j=\{1,2,...,l\}$ la economía habrá alcanzado un estado estacionario, más precisamente, se ubicará en la variedad *walrasiana* de equilibrios. Una vez que los precios estén en equilibrio, o equivalentemente que la economía haya alcanzado su estado estacionario, dejan de modificarse y sólo lo harán si algún factor externo perturba al sistema económico. En general, si la dinámica fuera del equilibrio es la dinámica de Samuelson, nada obliga a que la economía vuelva a ubicarse automáticamente en un muevo estado estacionario o volver al anterior.

Los equilibrios *buenos* serán aquellos que, en caso de que la economía sufra alguna modificación, que altere los precios de equilibrio, éstos se retomen *naturalmente*, mientras que son *malos*, aquellos para los que, la menor perturbación desestabiliza el sistema económico. Los matemáticos llaman a los primeros estados estacionarios asintóticamente estables, y los segundos inestables, sin duda los nombres son reflejo de sus propiedades.

Como ya vimos, a medida que las economías se modifican, esto es, en la medida en que la distribución de la riqueza inicial lo hace, los precios de equilibrio se modifican también. Si sólo miramos las economías en equilibrio nos mantenemos en la hipersuperficie de equilibrio. Cuando de ella nos salimos, los precios dejan de ser los de equilibrio. En ese momento, comenzaría a actuar la dinámica de Samuelson.

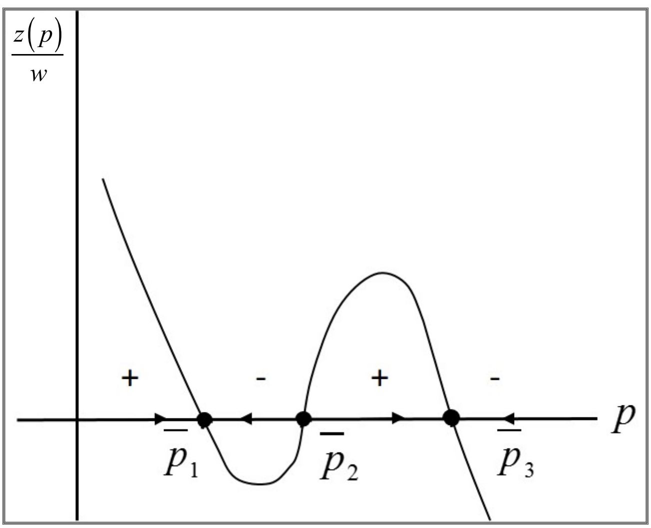
Buenos o malos, los equilbrios dinámicos o estados estacionarios, se ubican a lo largo de la hipersuperficie de equilibrio. Una vez que el sistema se perturba y nos salimos de la variedad de equilibrio, la dinámica de Samuelson haría que la economía volviese a ubicarse en la hipersuperficie de equilibrio. Claro está, siempre que la función exceso de demanda tuviera un comportamiento satisfactorio, lo que, como anteriormente indicamos, siempre resulta para economías con dos bienes. En casos más generales necesitamos, por ejemplo, asegurar que no se produzcan ciclos.

No obstante, aun en caso en que la dinámica de Samuelson nos lleve nuevamente a la variedad de equilibrio, no necesariamente lo hará al mismo precio en que estábamos antes de la perturbación. Esto ocurrirá si, y solamente si, el equilibrio original es bueno, ésto es, asintóticamente estable. En la figura 1, éstos son los que se ubican en la rama superior o en la inferior. Pero si los precios originales estaban en la rama central, la dinámica de Samuelson los obligara a alejarse del equilibrio original.

Mantengámonos en el caso simple de una economía con sólo dos bienes. La figura 2, representa la función exceso de demanda de uno de ellos. Si los equilibrios correspondientes a las ramas alta y baja de la figura 1 se vieran perturbados, la dinámica de Samuelson haría que el equilibrio se recuperase, más o menos rápidamente de acuerdo al valor de la constante k de la dinámica (ecuación 2). Si el precio de equilibrio es el central, entonces cualquier perturbación haría que la economía evolucionase hacia el precio de equilibrio de la rama alta o el correspondiente de la rama baja, dependiendo del tipo de perturbación ocurrida. Obsérvese que si originalmente la economía se encuentra en el equilbrio p_1 y ocurre un perturbación tal, que lleva a que el precio se ubique a la izquierda de p_1, es decir, a un precio $p < p_1$, al disminuir el precio la demanda por el bien aumenta, consecuentemente tendremos que $Z(p)>0$, tal como se indica en la figura 2. Una vez que la perturbación ocurre, la dinámica de Samuelson hará que los precios tiendan a crecer, hasta alcanzar nuevamente p_1 para el que $Z(p_1)=0$, Análogamente, si la perturbación lleva los precios hacia la derecha, donde la función exceso de demanda es negativa, el precio tiende a disminuir hasta alcanzar nuevamente p_1 Si la perturbación ocurre en el precio de equilibrio p_2, si es hacia derecha, obtendremos un precio para la economía perturbada igual a $p' > p_2$ para el que se verifica $Z(p')>0$ la dinámica de Samuelson llevará a los precios en el sentido creciente, alejándolos de p_2 hasta alcanzar p_3. Contrariamente si la perturbación lleva los precios hacia la izquierda tendremos $p''<p_2$ donde $Z(p'')<0$ consecuentemente la dinámica de Samuelson hará que los precios se muevan en sentido decreciente hacia p_1. Mediante un razonamiento análogo, el lector puede convencerse de que una vez perturbado el equilibrio p_3 la dinámica de Samuelson llevará a que los precios perturbados converjan paulatinamente hacia p_3. Esto significa que los equilibrios de las ramas altas y bajas de la curva de equilibrios walrasianos son equilibrios o estados estacionarios, buenos, es decir, asintóticamente estables, e inestables o malos, los de la rama central.

Un resultado interesante es que, si la economía tiene un único precio de equilibrio, es decir, si existe una única solución para la ecuación z(*p)*=0, entonces, éste será siempre un equilibrio bueno para la dinámica de Samuelson, en lenguaje matemático asintóticamente estable. La mala noticia es que para que esto ocurra *z* tiene que ser una función muy especial.

Dejaremos para la siguiente sección hablar de los dos casos particulares antes indicados, que son las economías cuya distribución inicial de la riqueza, corresponden a w_a y w_b en nuestro dibujo simplificador. Para el modelo de dos bienes, la dinámica de Samuelson nos muestra que, efectivamente, los equilibrios centrales son inestables, es decir que una vez perturbada la economía los precios de equilibrio ubicados en esta rama de la variedad, se moverán hacia los equilibrios buenos, o asintóticamente estables, véase figura 2, recordemos que, cuando tenemos una economía con dos bienes, alcanza con encontrar los precios de equilibrio correspondientes a un mercado, el otro quedará en equilbrio automáticamente.



Fuente: elaboración propia.

Figura 2
La dinámica de Samuelson $p=kz(p)$

¿Por qué la economía se aleja de los equilibrios malos y tiende a acercarse a los equilibrios buenos? o más bien ¿qué hay de bueno en los equilibrios buenos y de malo en los equilibrios malos? La ciencia económica no tiene todavía una respuesta precisa, pero en primera aproximación podríamos decir que el bienestar social para grupos de agentes económicos de mucho peso en la economía es mayor en los equilibrios buenos que en los malos. Esto es, tales agentes prefieren las cestas de bienes correspondientes a los equilibrios *walrasianos buenos* a las que le corresponderan de acuerdo a los equilibrios *malos*. Como se ve, la clasificación de buenos y malos no es muy adecuada, pues depende de quién la haga. Esto hará que una vez fuera del equilibrio malo, cada grupo intente llevar a la economía al equilibrio bueno que mejor le parezca. Mientras que si se perturba el equilibrio bueno el grupo favorecido, prefierirá mantenerse en él. El argumento está lejos de tener una formalización acabada. En este sentido, no estamos mucho más lejos que Aristóteles (siglo iv a.c.), cuando se preguntaba por qué los cuerpos se mueven y contestaba diciendo que la naturaleza tiene horror al vacío (*horror vacui*, es la expresión latina). Nuestra respuesta es similar: hay una "tendencia natural" de la economía a apartarse de los equilibrios malos.

De todas formas, cabe decir que aún ante nuestra falta de conocimientos, los economistas modernos no hacemos una religión de nuestra ignorancia ni creemos en verdades reveladas por profetas y vigentes de una vez para siempre, (al menos así lo espero). La teoría económica moderna es heterodoxa, capaz de negarse a sí misma y tomar aquellos resultados que se muestran ciertos. No entraremos en más detalles, pues este camino nos lleva muy lejos de los objetivos de este trabajo.

4. Las crisis económicas: dependen de la geometría de Balasko o de la dinámica de Samuelson?

De tiempo en tiempo solemos escuchar que la economía atraviesa por una crisis o bien la sufrimos. La economía antes de la crisis era de una forma y luego de otra. Algunos antes eran ricos y luego de la crisis pierden gran parte de su fortuna, y también sucede el fenómeno inverso, algunos agentes económicos resultan favorecios por la crisis. Independientemente de lo que suceda con cada uno de los agentes económicos, las crisis económicas implican cambios abruptos en el bienestar social. La continuidad en los cambios económicos se pierde y sufrimos perturbaciones inesperadas en los precios. ¿Por qué ocurren estas cirisis? ¿cómo se carcaterizan?

Algunos economistas sostienen que es porque explota una burbuja, un fenómeno asociado a la valoración en forma desproporcionada e irracional de algún producto, otros, argumentan que se deben a que las modificaciones en las tasas de interés dejan de tener repercuciones sobre la economía real y entramos en una espiral inflacionaria, o bien porque la economía pierde competitividad. Pero esto más parece ser una descripción de apariencias que una caracterización de las crisis económicas desde el punto de vista de los fundamentos de la economía. Analicemos con más cuidado la variedad de Balasko y quizás nos enseñe algo sobre las crisis. Es decir, volvamos a los fundamentos de la teoría económica y veremos que más que dejar de lado la teoría fundamental, es necesario volver a ella con más atención y cuidado.

Si observamos con cuidado la figura 1 y nos centramos en las distribuciones de la riqueza correspondientes a w_a y w_b veremos que perturbaciones arbitrariamente pequeñas en la repartición de la riqueza, pueden dar lugar a grandes cambios en los precios de equilibrio, y precisamente las crisis económicas traen aparejados cambios abruptos en los precios. Si esta interpretación es correcta, las crisis económicas son el resultado de perturbaciones ocurridas en las economías singulares o críticas, las que Debreu identificó y más adelante, otros autores; entre ellos, Y. Balasko, describieron con más detalle, estas economías no abundan. Como demostró Debreu en (1970), ellas conforman un grupo muy reducido, la probabilidad de encontrarnos con una de ellas es muy pequeña, en realidad, conforman en el conjunto de economías, un subconjunto de probabilidad cero. Debe tenerse en cuenta el hecho de que aun siendo de probabilidad cero, esto no quiere decir que un fenómeno no pueda ocurrir. Por ejemplo, la vida es quizás un evento de probabilidad cero en el universo, no obstante, existimos. El comportamiento de las economías antes, durante, y después de una crisis, como veremos, puede analizarse a partir de la geometría de Balasko y de la dinámica Samuelson.

Si bien la segunda nos exige ser cuidadosos con los supuestos, la geometría de Balasko es más robusta y no exige de tantos cuidados con las hipótesis del modelo, para mostrar resultados interesantes. Por lo que no hay lugar a dudas acerca del comportamiento de las economías en equilibrio. Volvamos a la figura 1 que corresponde a nuestro ejemplo simple. Como ya vimos en estos casos los equilibrios correspondientes a la rama central son inestables (malos) y los de las ramas superior e inferior son asintóticamente estables. No obstante, si miramos con atención la figura 2, veremos que en el caso en que las economías correspondan a distribuciones de la riqueza del tipo w_a y w_b no hay tres equilibrios, sino sólo dos. Este tipo de economías son llamadas singulares o críticas y son, como ya dijimos, extraordinariamente raras. La figura 3, correspondiente a la función exceso de demanda de una economía del tipo w_a Como veremos estas economías son los preámbulos de las crisis económicas. ¿Si pudiéramos detectarlas a tiempo, podríamos evitar las crisis económicas?

Observemos nuevamente la figura 1, supongamos que nos ubicamos en una economía caracterizada por la distribución de la riqueza inicial w_a y que los precios están en el equilibrio correspondiente a p_a Supongamos ahora que w_a se modifica muy poco hacia la izquierda, como vemos el siguiente precio de equilibrio diferirá mucho de p_a La dinámica de Samuelson llevará a los precios hasta la rama superior. Supongamos ahora que por algún motivo queremos recuperar la situación anterior, si nos movemos un poco hacia la derecha, continuaremos ahora por la rama superior y no podremos volver a la situación original. Esto sucede también luego de atravesar por una crisis económica, es muy difícil si no imposible, volver a la situación anterior al momento en el que estalló la crisis. En la figura 3, se representa la función exceso de demanda correspondiente a esta economía. En el eje horizontal o de las abscisas, se dibuja la dirección en la que los precios se moverán de acuerdo a la dinámica de Samuelson.

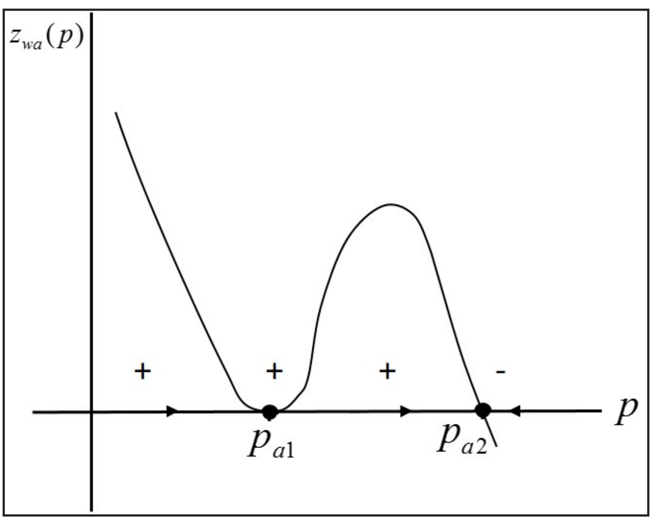


Figura 3
La dinámica de Samuelson para
un economía singular

No es difícil convencerse, siguiendo la figura 1, que esto en general no sucede así. Para cualquier otra distribución inical de la riqueza una modificación no muy grande, no ocasionará grandes cambios. Estas distribuciones corresponden a las economías llamadas regulares. Modificaciones "no muy grandes" en la distribución de la riqueza inicial, sólo ocasionan cambios "no muy grandes" en los precios de equilibrio. Mientras que para las economías singulares, perturbaciones arbitrariamente pequeñas en los parámetros del modelo, provocarán grandes cambios en los precios de equilbrio, y consecuentemente en el valor de la riqueza de los agentes, lo que dará como resultado un cambio abrupto en el conjunto de cestas que ahora, luego de esta perturbación, los agentes podrán adquirir en el mercado.

No obstante, ser un conjunto muy pequeño, de probabilidad nula, la existencia de singularidades no puede evitarse, es resultado natural del modelo económico.

Conclusión: las crisis son parte inherente a las economías de mercado. Más allá de su descripción y la forma como se visualicen posteriormente, responsabilizando por las crisis a la inflación, a la tasa de interés, o a una burbuja que explotó, ellas son una expresión del modelo descrito, en el que las economias singulares tienen su lugar.

La teoría matemática de las singularidades, ofrece alguna luz sobre las caractersticas de las crisis, pero, ciertamente, es imposible saber cuál es el equilibrio que la economía alcanzará luego de la crisis, como resulta imposible volver atrás, mediante modificaciones pequeñas en los parámetros que gobiernan a la economía. Ella se autorregula y como la naturaleza si la echamos por la puerta entra por la ventana, la economía tiene sus leyes, intentar modificarlas, aún con las mejores intenciones, muchas veces resulta peligroso.

La dinámica de Samuelson correspondiente a estas economías se representan en la figura 3. Se indica a la función exceso de demanda y los dos precios de equilibrio posibles para esta economía. Si por algún motivo el precio de equilibrio p_a se ve perturbado, comenzará a moverse hacia el otro equilibrio, abandonando el original para siempre. No obstante, el segundo equilibrio resulta asintóticamente estable, por lo que no nos podremos despegar de él fácilmente.

Entendiendo que bajo ciertas condiciones una autoridad económica puede influir de alguna forma en la economía, con el fin sobreentendido de aumentar el bienestar social, cabe la siguiente nota:

> Nota: Los impuestos tienen como objetivo precisamente el de modificar la riqueza de los agentes económicos, en principio, con un sentido de mejora social. Permiten,

si son bien aplicados, a sectores con escasos recursos acceder a bienes que de otra forma no accederan, salud, educación, etc., así como construir infraestructura necesaria para el desarrollo, que, por su alto costo, no ofrece condiciones de recuperación de la inversión privada en un plazo aceptable para los privados. No obstante, sería de interés determinar si la distribución de la riqueza existente en el momento en que se decide este tipo de medidas corresponde o no, a una economía crítica: las buenas intenciones pueden dar lugar a resultados no esperados y/o no deseados, esto es particularmente cierto cuando nos encontramos en una de tales economías. Malas decisiones de política económica, pueden acelerar el paso de una economía regular, a una singular, preámbulo de una crisis económica.

Como vemos la posibilidad de crisis económicas es un fenómeno intrínseco al modelo a que hacemos referencia y tan vigente como lo es, la existencia de economías singulares. Una vez que una economía regular deviene singular, cualquier perturbación en el comportamiento de los agentes económicos, hace estallar una crisis económica, esto es un cambio abrupto, inesperado e irreversible del conjunto de equilibrios posibles de ser alcanzado por la nueva economía.

5. Conclusión

Como espero que haya quedado claro al lector, los economistas matemáticos actuales tenemos más preguntas que respuestas sobre el funcionamiento de la economía y quizás nunca alcancemos respuestas satisfactorias a todos los problemas que la realidad económica nos plantea (hecho que de por sí no es malo, pues nos exige continuar con el estudio de esta teoría). Si bien la dúctil matemática posthilbertiana ayuda a resolverlos, quizás sea aún insuficiente. No obstante, hemos avanzado, sobre todo a partir de la segunda mitad del siglo xx, algo más sabemos acerca del comportamiento de los agentes económicos en el mercado, sabemos que no es fácil intervenir en la economía sin hacer desastres, y sabemos explicar por qué los desastres ocurren, aunque lamentablemente, muchas veces sólo luego de que ocurrieron. Pero ciertamente, aunque no sea un consuelo, no somos los únicos científicos que estamos en estas condiciones.

Sobre futuros trabajos. *El tiempo en economía*: cómo medir el tiempo en economía no es algo claro. La macroeconomía habla del largo periodo y del corto periodo. Cuánto es corto y cuánto largo no está bien definido. La microeconomía en general, intenta evitar considerar el tiempo. En nuestro trabajo hay dos tiempos. Uno el que transcurre en la variedad de equilibrios, donde todo se ajusta instantáneamente. Pero si la economía sufre alguna perturbación y se mueve fuera de esta variedad, cuánto tiempo tardará en recuperarlo? Si es que lo hace. En nuestro ejemplo sencillo de dos bienes, si lo hará, pero el tiempo que tarde en este proceso dependerá de la dinámica de Samuelson. El tiempo en economía como en física parece ser relativo al observador, el que está en la variedad de equilibrios lo mide distinto de aquel observador que sigue la dinámica de Samuelson.

Dar una definición de tiempo en economía no es sencillo. Pero sin duda hay allí un espacio amplio para trabajar.

Referencias

Arrow, J. y F. Hahn (1971). General competitive analysis *San Francisco, Holden-Day*.

Balasko, Y. (2009). The equilibrium manifold: postmodern developments in the theory of general economic equilibrium. *Arne Ryde Memorial Lectures, MIT Press*.

Balasko, Y. (1988). Foundations of the Theory of General Equilibrium. *Mit Pres*.

Debreu G. (1959). Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. *Cowles Foundation Monographs Series*.

Debreu G. (1970). "Economies with a Finite Set of Equilibria", *Econometrica,* 38/3 pp. 387-392.

Hicks, J. (1939). "The Foundations of Welfare Economics" *Economic Journal*, vol. 49/196, pp. 696-712.

Mantel, Rolf (1974). "On the characterization of aggregate excess demand". *Journal of Economic Theory*, núm., 7, pp. 348-353.

Samuelson, P. A. (1947). Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, enlarged ed. 1983.

Samuelson, P. A. (1944). "The relation between Hicksian stability and true dynamic stability", *Econometrica* 12.

Smith, A. Teora de los sentimientos morales (1759), ed. conmemorativa 70 Aniversario, México, 2004. ISBN 968-16-7339-5.

Varian, H. R. (1992). "Microeconomic Analysis". *W. W. Norton & Co Inc (Np)*, ed. 3a.

Walras, L. (1874). Éléments d'Ã©conomie politique pure, ou théorie de la richesse sociale. *TraducciÃ³n de Julio Segura.* Madrid. Alianza Editorial, 1987.