

ESTUDIO DE VOLATILIDAD IMPLÍCITA A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Guillermo Sierra-Juárez*
Francisco Ortiz-Arango**

(Recibido: mayo de 2013/Aprobado: octubre de 2013)

Resumen

El efecto de una gran cantidad de variables sobre una serie financiera hace difícil diferenciar efectos correlacionados producidos por distintas variables de origen. Mediante el método de componentes principales (PCA) y la técnica de vectores y valores propios, se hace una transformación a una base ortonormal explicando en pocas variables los principales efectos. Esta idea es aplicada a la volatilidad implícita del mercado mexicano de derivados obteniendo en dos variables, de nivel, tendencia y curvatura la principal explicación.

Palabras clave: volatilidad, PCA, valores propios, vectores propios.

Clasificación JEL: C61, G10, G12.

Abstract

The effect of a large number of variables over a range becomes difficult to differentiate financial effects produced by different variables correlated source. By the method of principal components (PCA) technique and the eigenvectors and eigenvalues is transformed to an orthonormal basis in a few variables explaining the main effects. This idea is applied to the

* Universidad de Guadalajara, CUCEA, Departamento de Métodos Cuantitativos, Guadalajara, México
gsierraj@yahoo.com.mx.

** Universidad Panamericana, México, DF.

implied volatility of the Mexican derivatives market getting two variables, level, trend and curvature of the main explanation.

Keywords: volatility, PCA, eigenvalues, eigenvectors.

JEL classification: C61, G10, G12.

1. Introducción

Muchos mercados financieros se han caracterizado por un alto grado de colinealidad que puede ser originada cuando hay muchas variables y pocas fuentes de información. El análisis principal de componentes (ACP o PCA por sus siglas en inglés) tiene una interesante aplicación en la interpretación de variables financieras con la primera componente como es el nivel, la segunda componente como la tendencia y la tercera la curvatura, y actualmente no sólo se estudia la estructura de plazos de tasas de interés o futuros, sino también la volatilidad.

Entre algunos trabajos previos que analizan los modelos de componentes principales (PCA) sobre los *smiles* y *skwes* de volatilidad basados en cambios diarios de volatilidades implícitas por *strike* y/o *moneyness* están el Derman (1994) y Derman and Kamal (1997) donde analizan los índices S&P 500 y Nikkei 225 considerando cambios diarios en la superficie de volatilidad y especificados por la griega delta y el vencimiento. También se tiene el trabajo de Flenger(2000) donde se empleó un modelo de PCA que considera opciones sobre acciones en el DAX que puedan ser analizados simultáneamente.

Un artículo importante y que es considerado básico en este trabajo, además de tener diferencias respecto a los trabajos mencionados anteriormente, es el de Carol Alexander (2000), ya que el PCA es aplicado a cambios diarios en la desviación de las volatilidades de *strike* fijos con respecto a la volatilidad en el dinero (ATM) y que representa ventajas teóricas y empíricas.

Desde el punto de vista empírico, las series de tiempo sobre precios *strike* fijos o deltas de volatilidades fijas, despliegan mucho más autocorrelación negativa posiblemente explicada por la sobre reacción de los mercados. Por otra parte, las variaciones diarias en las desviaciones del *strike* fijo de las volatilidades ATM son mucho menos ruidosas que los cambios diarios en las volatilidades de *strike* fijos. Entonces es de esperar resultados más robustos $\Delta(\sigma_K - \sigma_{ATM})$.

El modelo teórico también apoya lo anterior, y los *skews* fueron introducidos por Derman(1999) que pueden ser expresados en forma donde las desviaciones de la volatilidad de *strike* fijo de la volatilidad ATM tienen la misma relación con el índice de mercado. En particular, el régimen de mercado es determinado sólo por diferente comportamiento en volatilidad ATM. Entonces la estabilidad de PCA en $\Delta(\sigma_K - \sigma_{ATM})$ es implícita por el modelo.

La delta de una opción con valor $C(S, \sigma)$, escrita como función del precio del activo subyacente S y su volatilidad σ , está dado, por

$$\Delta = \Delta_{BS} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial S}$$

donde Δ_{BS} es la delta de Black-Scholes, si la volatilidad no fuera constante el término $\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial S}$ debería ser incluido en dicha sensibilidad. La sensibilidad del valor de la opción (vega) $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ se puede aproximar con la información disponible, ya sea por métodos de simulación o por diferencias finitas, sin embargo, $\frac{\partial \sigma}{\partial S}$ es más difícil de cuantificar y normalmente se aproxima $\frac{\partial \sigma}{\partial S} = \frac{\partial \sigma}{\partial K}$, es decir, la sensibilidad de la volatilidad a movimientos en el precio subyacente es tomado de la pendiente del *skew* o *smile* por precio *strike*.

Derman (1999) propuso la parametrización del *skew* de volatilidad de una forma lineal $\sigma(S, \tau) = b(\tau)S + c(\tau)$, se supone que los valores de los parámetros saltan entre distintos niveles de acuerdo al régimen del mercado de capital. En Carol Alexander (2000) propone una parametrización cuadrática $\sigma(S, \tau) = a(\tau)S^2 + b(\tau)S + c(\tau)$. En este modelo conforme el índice (o cualquier subyacente) se mueve, la superficie de volatilidad también se moverá continuamente, si el segundo componente tiene correlación condicional distinta de cero cuando el índice cambia, no habrá movimientos paralelos en la superficie cuando el índice se mueve. El modelo tiene aplicaciones a todos los tipos de superficies de volatilidad implícita incluyendo, por supuesto, *smiles* de opciones y *skews* de *swaptions*.

2. El modelo

Antecedentes

El objetivo del análisis de componentes principal (ACP o PCA por sus siglas en inglés) es reducir la dimensión de múltiples variables aleatorias a un

conjunto de variables no correlacionadas que son combinaciones lineales de las variables originales que sí pueden estar correlacionadas. Supongamos que las variables aleatorias correlacionadas se pueden escribir como un vector X (de $n \times 1$) con matriz de covarianzas Σ . PCA determina una nueva variable aleatoria y_1 que es una combinación lineal de las X ponderadas por γ_1 y se puede expresar como:

$$y_1 = \gamma_1^T X = \sum_{j=1}^n \gamma_{1j} X_j$$

Se elige γ_1 que maximice el valor de la varianza de y_1 , $Var(y_1) = Var(\gamma_1^T X) = \gamma_1^T \Sigma \gamma_1$, la nueva variable y_2 es determinada con un nuevo vector ($n \times 1$) γ_2 el cual maximiza $Var(y_2) = Var(\gamma_2^T X) = \gamma_2^T \Sigma \gamma_2$, de tal forma que y_1 no está correlacionada con y_2 , el k -ésimo estado y_k no está correlacionado con $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ y tiene varianza máxima en ese punto.

El problema de maximización a resolver del k -ésimo estado es:

$$\max_{\|\gamma_k\|=1} \gamma_k^T \Sigma \gamma_k$$

sujeto a

$$Cov(y_k, y_{k-1}) = Cov(\gamma_k^T X, \gamma_{k-1}^T X) = 0$$

El problema puede ser resuelto seleccionando las γ_k , como el correspondiente eigenvalor o valor propio del vector correspondiente al mayor eigenvalor o vector propio de Σ (la cual es la matriz de covarianza de X).

Se busca que los vectores propios sean ortonormales y como se ve en la ecuación, la maximización está sujeta a la restricción que la longitud es $\|\gamma_k\|=1$. Ésta es una aproximación para evitar valores infinitos de las componentes γ_k , como resultado de esto la k -ésima componente y_k es el k -ésimo mayor valor del valor propio λ_k de la matriz de covarianza de X , esto es $Var(y_k)=\lambda_k$. Sin embargo, es posible distinguir entre un análisis PCA basados en matrices de covarianza y matrices de correlación. Si se escribe el problema anterior en forma de matriz, el nuevo vector aleatorio X es transformado a un nuevo vector aleatorio Y .

$$Y=\Gamma^T X$$

Donde Γ^T es una matriz cuyo k -ésimo renglón es el vector γ_k^T tiene renglones ortonormales, donde $\Gamma^T = \Gamma^{-1}$. Sustituyendo en la ecuación de arriba, se puede representar el vector original de X como:

$$X = \Gamma y = y_1 \gamma_1 + y_2 \gamma_2 + \cdots + y_n \gamma_n$$

Como $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son ortogonales y forman la base de R^n . Algunas veces se refiere al PCA como un procedimiento de transformación de una base a otra. En otras palabras, se puede representar a X en una nueva base, la cual es equivalente a la representación de X con vectores euclidianos

$$X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + \dots + X_n e_n,$$

donde e_k es la base vectorial n -dimensional el cual tiene 1 como la k -ésima componente y a cero las componentes restantes.

Algunos vectores definen los vectores γ_k como la k -ésima componente de las componentes principales. Una interpretación interesante es en el sentido económico y financiero es que γ_k se refiere al vector *shift*, *skew* o curvatura. Recordando de los párrafos anteriores que los eigen valores λ_k son la varianza de la variable aleatoria y_k , la varianza explicada asociada con la k -ésima PCA se puede expresar como:

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

en el caso de las primeras tres componentes

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

De varios resultados empíricos es común que las primeras tres componentes expliquen cerca del 100% de la varianza en los datos del mercado financiero.

En su trabajo Lord y Pelsser fueron de los primeros en encontrar aplicaciones del PCA en los mercados. En su interpretación consideraron patrones de nivel, pendiente y curvatura de las estructuras de plazos de tasas de interés. Definen esos patrones en términos del cambio de signo de la matriz de covarianza de los vectores propios, según su razonamiento, el patrón de nivel no tiene cambio de signo, la pendiente tiene un cambio de signo y la curvatura tiene dos cambios.

Las relaciones entre desviaciones de *strike* fijos de volatilidad ATM y el precio subyacente son las mismas del modelo *sticky* de Derman. Para cualquier vencimiento τ se tendrá una relación lineal entre la desviación de una volatilidad *strike* fija de la volatilidad ATM y el precio subyacente dado por:

$$\sigma_K(\tau) - \sigma_{ATM}(\tau) = -b(\tau)(K - S)$$

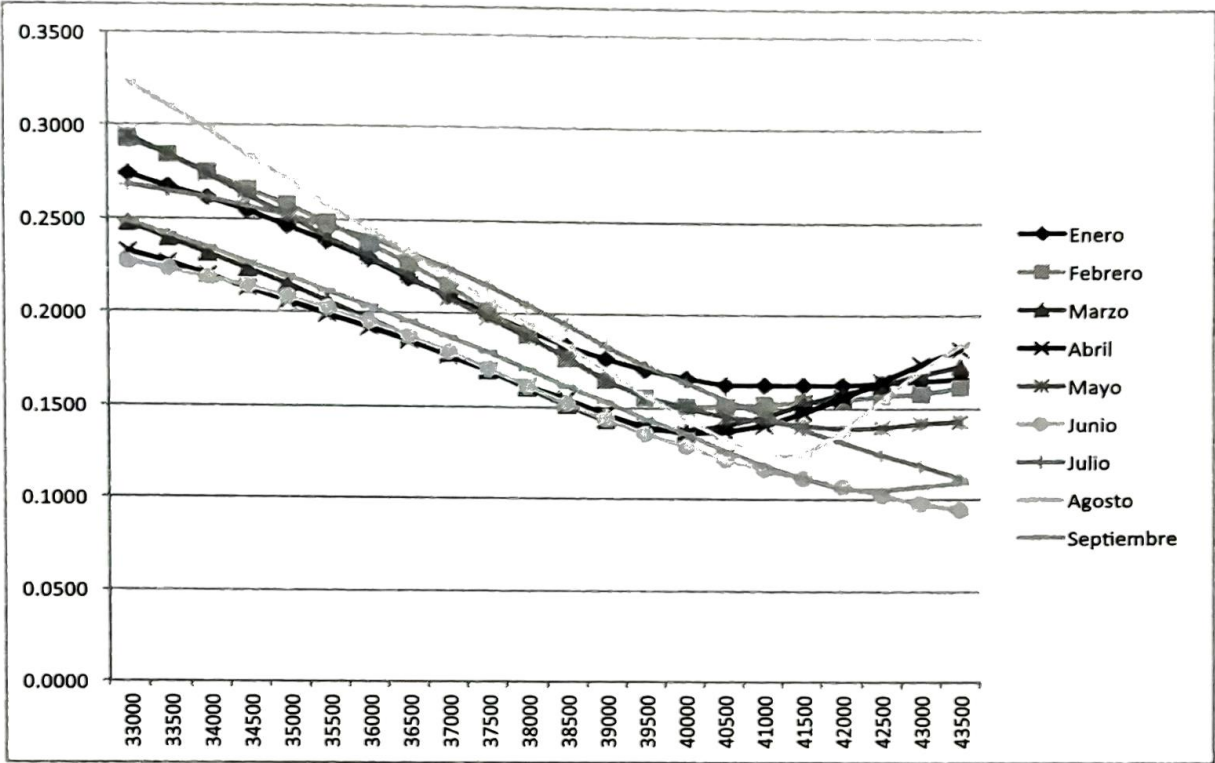
Dado cualquier vencimiento, las desviaciones de todas las volatilidades *strike* fijas de la volatilidad ATM cambiarán por la misma cantidad $b(\tau)$ conforme cambia el nivel del índice.

Resultados

Para el análisis de la información se consideró el boletín *Resumen y Análisis del Mercado Mexicano de Derivados (Market Statistics)* (enero-septiembre 2012) donde para opciones sobre el índice de precios y cotizaciones (IPC) de características similares entre los meses de enero y agosto de 2012 y para una serie de distintos valores de precio de ejercicio, se grafican las volatilidades implícitas. En las gráficas 1 y 2 aparecen las curvas *Smile* para distintos meses y para el caso de una opción *call* y *put*. En las gráficas 3 y 4 aparece la evolución de la volatilidad en el tiempo.

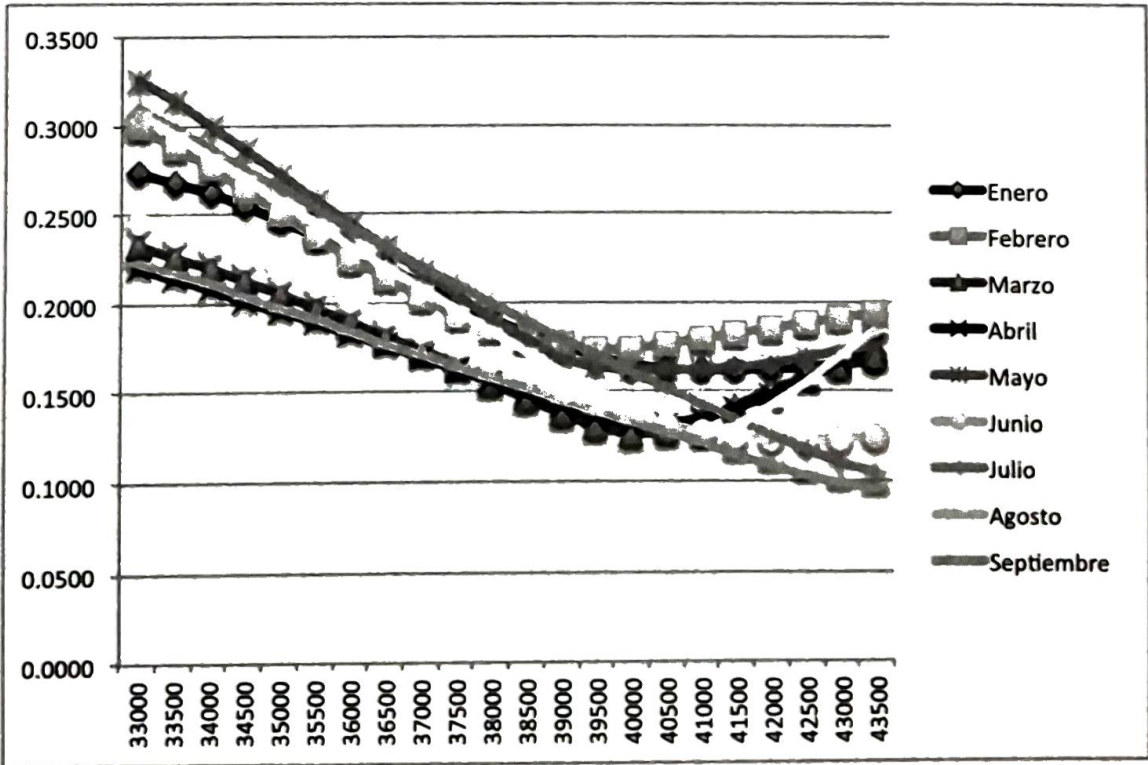
Aplicando la técnica PCA explicada en la sección anterior a la evolución de la volatilidad y con distintos precios *strike*, en la tabla 1 y en las gráficas 5 y 6 aparecen los valores propios y las componentes principales de la volatilidad implícita para opciones financieras *call* y *put*.

Gráfica 1
Smile de volatilidad de una opción *call* sobre IPC con distintos precios *strike*



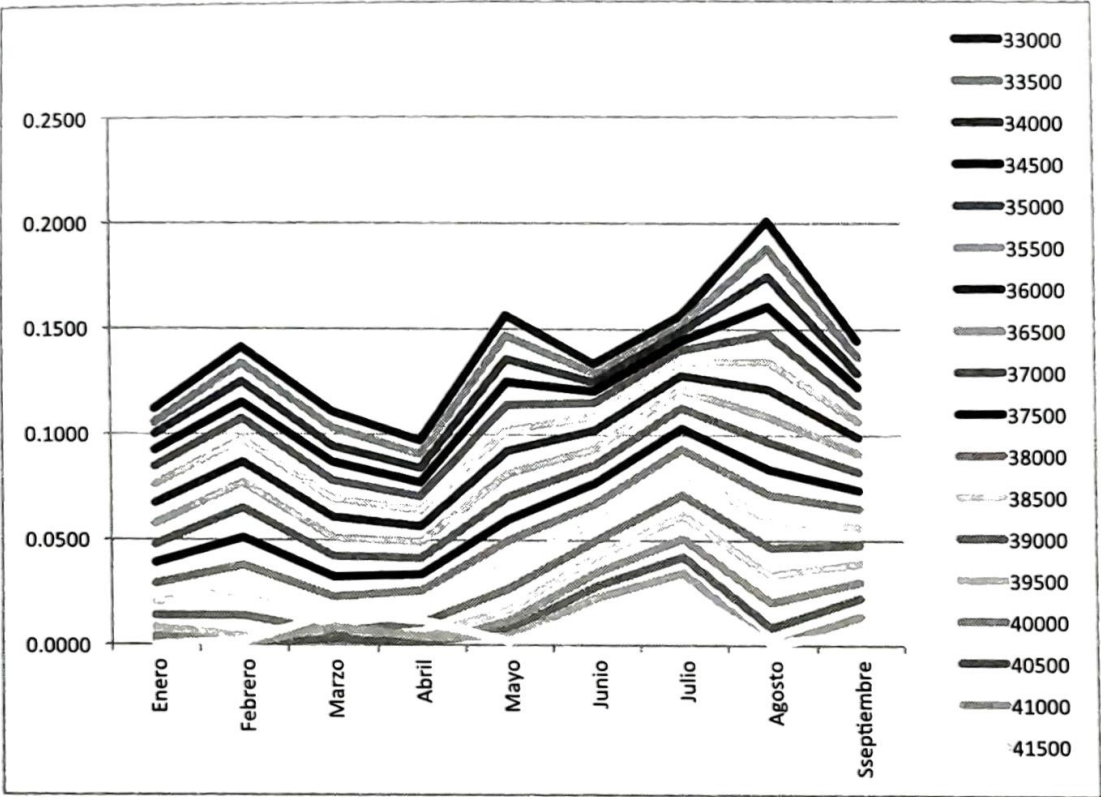
Fuente: elaboración propia.

Gráfica 2
Smile de volatilidad de una opción *put* sobre IPC con distintos precios *strike*



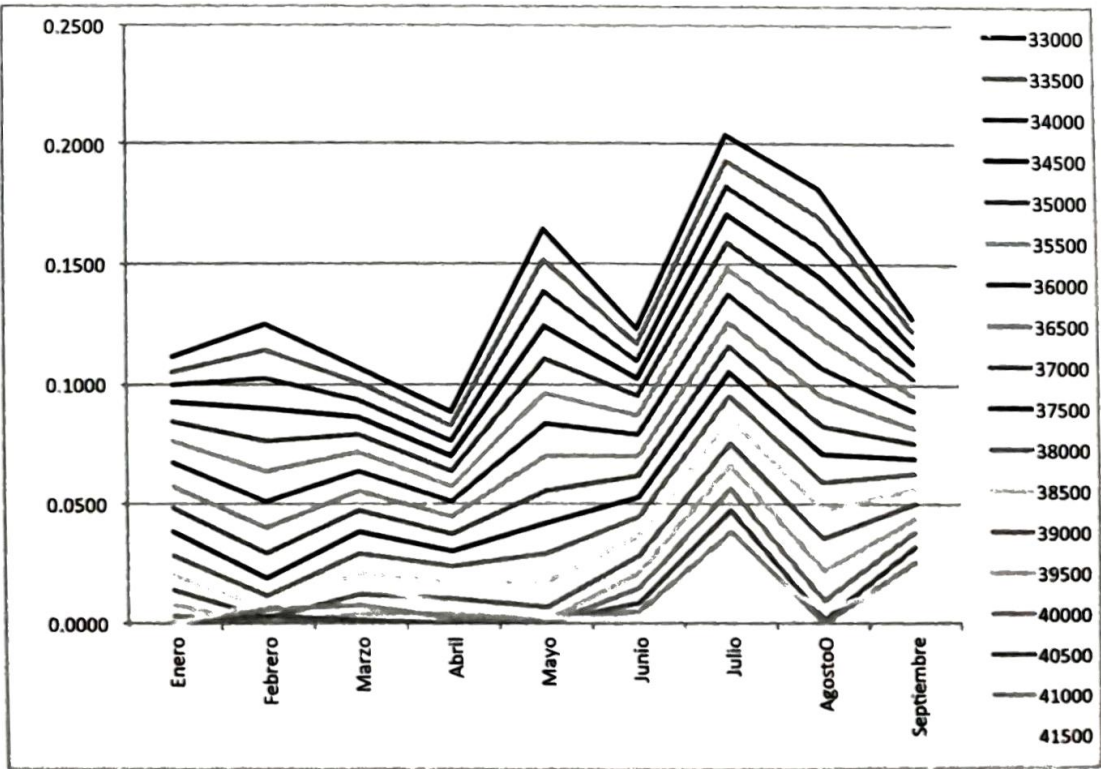
Fuente: elaboración propia.

Gráfica 3
Evolución de la volatilidad en el tiempo de una opción *call* sobre IPC



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 4
Evolución de la volatilidad en el tiempo de una opción *call* sobre IPC



Fuente: elaboración propia.

Tabla 1
Resultados de componentes principales opción *call*

<i>Eigen Values</i>	27.70484	0.327965	0.006855	0.001947	0.001174	0.001025	0.000993	0.000911	0.000663	0.000425	0.000242
Enero	0.367544	-0.39636	-0.39849	-0.69204	-0.03309	-0.08237	-0.01863	-0.05109	-0.13055	-0.20532	-0.00831
Febrero	0.352357	-0.37998	-0.38202	0.721864	-0.03172	-0.07896	-0.01786	-0.04898	-0.12516	-0.19684	-0.00796
Marzo	0.337088	-0.36351	0.833824	0	-0.03034	-0.07554	-0.01708	-0.04686	-0.11973	-0.18831	-0.00762
Abril	0.32536	-0.11657	0	0	-0.02902	-0.07225	-0.01634	-0.04482	-0.11451	0.92695	-0.00729
Mayo	0.312155	0.001569	0	0	-0.02776	-0.06911	-0.01563	-0.04287	0.94598	-0.00117	-0.00697
Junio	0.298652	0.112068	0	0	-0.02651	0.945491	-0.01492	-0.04093	-0.03261	-0.0242	-0.00666
Julio	0.283739	0.203968	0	0	-0.02535	-0.07763	-0.01427	0.930413	-0.05855	-0.0434	-0.00636
Agosto	0.271295	0.270702	0	0	0.902874	-0.10266	-0.01364	-0.13383	-0.07738	-0.05724	-0.00608
Septiembre	0.258016	0.3323	0	0	-0.21558	-0.12575	0.848441	-0.16415	-0.09475	-0.07007	-0.00578
	0.245019	0.380679	0	0	-0.24684	-0.14387	-0.35777	-0.18796	-0.10389	-0.08013	0.729331
	0.232207	0.412318	0	0	-0.26727	-0.15571	-0.38739	0.20352	-0.1173	-0.0867	-0.68383

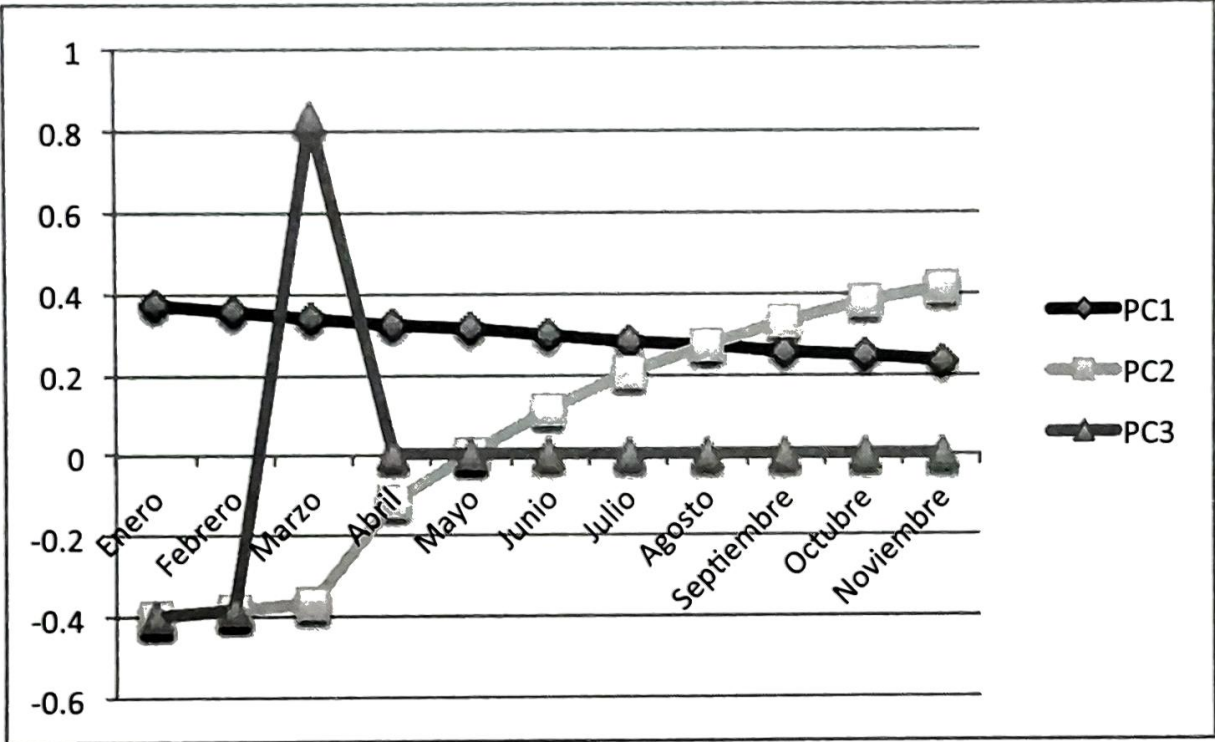
Fuente: elaboración propia.

Tabla 2
Resultados de componentes principales opción Put

<i>Eigen Values</i>	26.11316524	0.286975646	0.004371263	0.002018699	0.001548129	0.001302998	0.001251708	0.00105862	0.000896493	0.000853849	0.000782243
Enero	0.380371128	-0.373966095	-0.396920826	-0.059733544	-0.091596245	-0.040729992	-0.691056483	-0.140807887	-0.022864278	-0.215181432	-0.009611192
Febrero	0.363665824	-0.35754209	-0.379488686	-0.05711014	-0.087573482	-0.038941195	0.722800759	-0.134623825	-0.021860115	-0.205731001	-0.009189084
Marzo	0.345787266	-0.339964588	0.835728542	-0.054302488	-0.08326819	-0.037026766	0	-0.128005442	-0.020785427	-0.195616843	-0.00873733
Abril	0.327646398	-0.119735019	0	-0.051453644	-0.078899731	-0.035084248	0	-0.121289955	-0.019694971	0.923601715	-0.008278947
Mayo	0.310878306	-0.009758506	0	-0.048709185	-0.074691341	-0.033212908	0	0.945406135	-0.018644471	0.001781013	-0.007837361
Junio	0.293614761	0.097790658	0	-0.045957623	0.948605987	-0.031336725	0	-0.024439237	-0.017591253	-0.017847651	-0.007394632
Julio	0.277970518	0.191072117	0	0.936749908	-0.063575639	-0.029637768	0	-0.047554069	-0.016637523	-0.034872333	-0.006993723
Agosto	0.263289574	0.260433587	0	-0.113585449	-0.086551156	0.914176139	0	-0.064739573	-0.015745553	-0.047531408	-0.006618776
Septiembre	0.248346602	0.339807343	0	-0.148091968	-0.112844834	-0.191842158	0	-0.084407033	0.860451441	-0.062017813	-0.006236521
	0.234979135	0.408702194	0	-0.178042479	-0.135666872	-0.230640823	0	-0.101477735	-0.339068652	-0.074591726	0.737304755
	0.223178835	0.453763877	0	-0.197628466	-0.150591229	-0.256013016	0	-0.112641035	-0.376368706	-0.082815877	-0.675138714

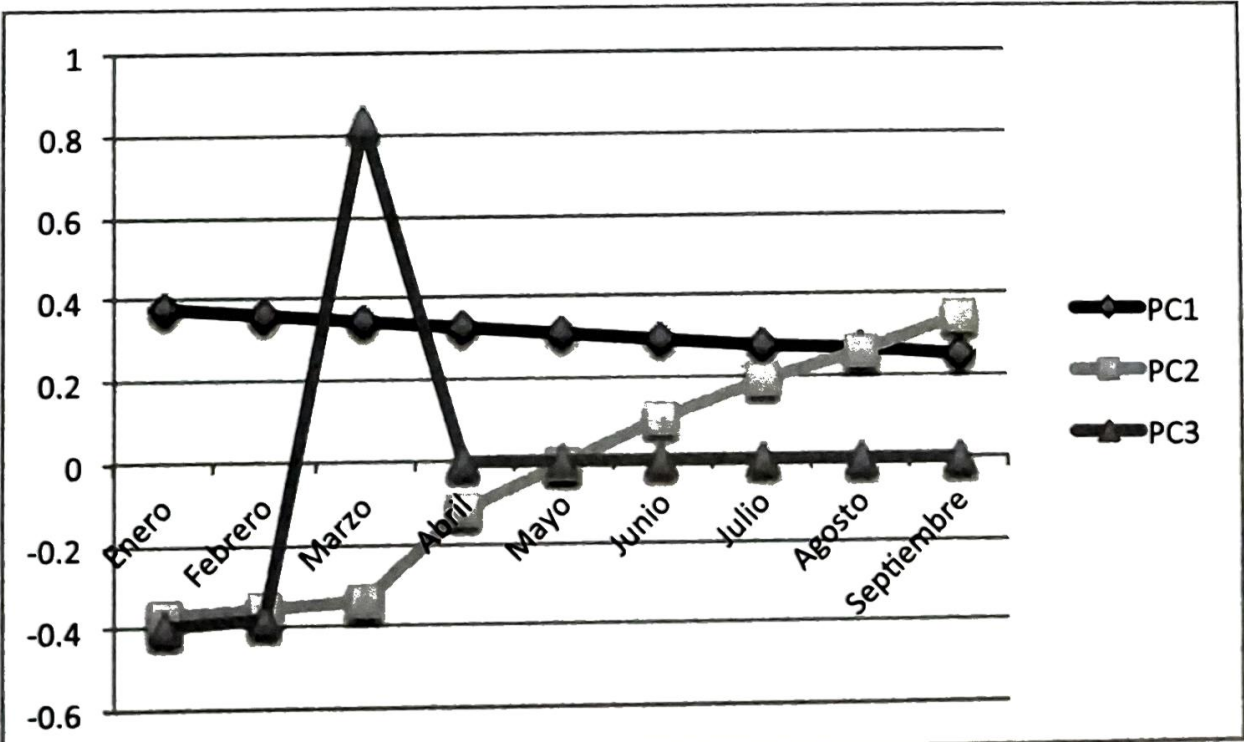
Fuente: elaboración propia.

Gráfica 5
Componentes principales de la volatilidad implícita opción *call*



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 6
Componentes principales de la volatilidad implícita opción *put*



Fuente: elaboración propia.

Conclusión

De acuerdo con las tablas y gráficas de las secciones anteriores (tanto para las opciones *call* como *put*), se observa que después de la transformación PCA y el cambio de una nueva base, fundamentalmente se explica la volatilidad a lo más con dos componentes. En el caso del *smile* de volatilidad implícita del IPC en el periodo señalado, la primera componente está asociada al nivel, es una curva de forma lineal con pendiente constante ligeramente negativa, la segunda de ellas está asociada a la tendencia, tiene un cambio de signo y tiene pendiente positiva. La tercera componente relacionada con la curvatura (tanto para *call* como para *put*) no tiene una aportación significativa, excepto para el mes de marzo de 2012.

Referencias

- Alexander, C., "Principal Component Analysis of Implied Volatility Smiles and Skews" *ISMA Centre Discussion Papers in Finance* 2000-10, University of Reading U.K.
- Derman, E. (1999), "Volatility Regimes". *RISK Magazine* 12:4 pp 55-59.
- Derman, E., and Kamal (1997), "The Patterns of Change in Implied Index Volatilities". *Quantitative Strategies Research Notes*, Goldman Sachs.
- Derman, E., and Kani (1994), "Riding on a Smile". *RISK Magazine* 7:2 pp 32-39.
- Flenger, M.; W. hardle, and C. Villa (2000), "The dynamics of Implied Volatilities. A common Principal Component Approach".
- Reiswish D., and M. Tompkins, "Potential PCA Interpretation Problems for Volatility Smile Dynamics. Centre for practical quantitative finance Frankfurt School of Finance and Management", *Working Paper Series* No.19.
- Resumen y Análisis del Mercado Mexicano de Derivados (Market Statistics) (Enero-Septiembre 2012).
- Skiadopoulos, G.; S. Hodges, and L. Clewlow (1998). "The Dynamics of Implied Volatility Surfaces". *Financial Options Research Centre Preprint* 1998/86 Warwick Business School, University of Warwick UK.