

VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS Y MODELO DE ESTRUCTURA DE PLAZOS VASICEK SOBRE SUBYACENTES CON CARACTERÍSTICAS DE MEMORIA LARGA: EL CASO DE MÉXICO

Guillermo Sierra Juárez*

RESUMEN

La aplicación de la metodología (R/S), de la teoría de fractales, para la determinación del coeficiente Hurst, revela la posibilidad de un comportamiento de memoria larga en alguna de las variables de mercado representativas de México. Aunque bajo ciertas pruebas dichos resultados pueden resultar ser estadísticamente no significativos.

A partir del Movimiento Browniano Fraccional (MBF), que es un proceso estocástico más general que el movimiento browniano tradicional, pueden modelarse procesos con persistencia o antipersistencia. Con base en este proceso, y utilizando bases matemáticas más generales, se deduce una forma más amplia de valuación de opciones europeas y la ecuación Black-Scholes, así como la ecuación general de bonos y la estructura de plazos del modelo de

* Catedrático del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México y Estado de México, y de la Universidad Nacional Autónoma de México, Posgrado de Ingeniería. Correo electrónico: <gsierraj@yahoo.com.mx> y <guillermo.sierra@itesm.mx>.

tasas de Vasicek, útiles en los casos en donde las series financieras muestran comportamientos de persistencia. Dichas modelaciones se aplican al caso de una variable de mercado mexicano y se obtienen resultados interesantes.

Clasificación JEL: C61, G10, G12

Palabras clave: Browniano Fraccional, proceso estocástico, ecuación Black-Scholes

ABSTRACT

The results of (R/S) methodology from fractals theory in order to determine the Hurst's coefficient had shown the possibility of existence of long memory in some representative variables in Mexican market. However those results could be not statistically significant.

Fractional Brownian Motion (FBM) is a stochastic process more general than traditional brownian motion. FBM include a model independent process and no independent process. Using FBM and more general mathematical tools is possible to building Black-Scholes Fractional equation, European option valuation, general bonds equation and term structure from Vasicek model for persistent financial series. Those models are development for one Mexican financial variable and get interesting results.

JEL classification: C61, G10, G12

Keywords: Fractional Brownian, stochastic process, Black-Scholes equation

1. INTRODUCCIÓN

El modelo de Black-Scholes, la valuación de derivados, la estimación de curvas de tasas de interés y la medición de los diferentes tipos de riesgos han sido desarrollados sobre las bases de procesos estocásticos del movimiento browniano y el cálculo de Itô, con la consideración de ciertos supuestos sobre las características de las variables financieras y los mercados.

Sin embargo, con el paso del tiempo se ha encontrado que algunos de los modelos financieros no explican ni se ajustan a la realidad. Por lo tanto se requiere del desarrollo de teorías más generales que expliquen estas diferencias con mayor precisión y que incluyan, como casos particulares, las ya existentes.

Un tema central en el presente trabajo está relacionado con la teoría de fractales y el particular estudio de series con memoria. De la literatura sobre este tema se encuentra el artículo seminal de Hurst (1951), en su estudio de hidrología y su novedosa metodología Rango Reescalado (R/S) para la determinación del coeficiente del mismo nombre. Además se consideran los artículos clásicos de Mandelbrot (1968 y 1982), quien se conoce como el padre de la geometría fractal. Por otra parte, los libros de Peters (1991 y 1994) resultan ser una referencia fundamental sobre las ideas, técnicas y conceptos de los mercados fractales. Su obra resume el estado del arte actual sobre las teorías de fractales y caos y su relación con los mercados financieros. De forma sencilla aplica estos conceptos matemáticos al análisis de los mercados, principalmente de Estados Unidos. También describe con detalle el trabajo de McCulloch (1978 y 1985) sobre la estadística fractal y, en particular, la evaluación de opciones con funciones más generales, como las de Levy (también es recomendable consultar al autor original). Se debe mencionar el trabajo de Palomas (2002) dentro de los primeros antecedentes sobre la aplicación del método (R/S) en la determinación del coeficiente Hurst para el caso de variables financieras de México.

Sobre el tema del Movimiento Browniano Fraccional (MBF), algunos de los primeros intentos de recuperar propiedades básicas, como la de no arbitraje, fueron hechos por Dai y Hayde (1996) y Lin (1995). A pesar de los esfuerzos realizados en esta dirección no se pudo eliminar la presencia de arbitraje en sus resultados. Posteriormente, surgió una nueva forma de solución a través de la construcción de una nueva integral a partir del producto Wick y fue analizada por Desagupta (1997 y 2000) y Shryaveev (1998), entre otros. Una vez resuelto el problema anterior para procesos brownianos fraccionales con el nuevo formalismo, quienes tal vez han publicado la mayor cantidad de material sobre el MBF y su aplicación en las finanzas son Oksendal (2004) y

Hu (2000), además de Duncan y Pasik-Duncan (2002). Estos trabajos se inician desde la definición de la métrica de un espacio de Hilbert y van recuperando varias de las técnicas matemáticas que el modelo Black-Scholes tradicional utiliza, además mediante el uso del producto Wick, las derivadas Malliavin y las integrales Skorohod, es posible generalizar, entre otros, el teorema de Girsanov, las esperanzas condicionales y el lema de Itô para su posterior aplicación en las finanzas. Los artículos de Necula (2002) presentan una perspectiva diferente de los estudios de Oksendal y Hu y, en forma práctica, presentan una deducción de la ecuación Black-Scholes a partir de movimientos browniano fraccionales. En otro trabajo relacionado con el tema, Rosek (2006) también presenta una deducción alternativa del lema de Itô para el caso fraccional. Por último, los trabajos de Vasconcelos (2004) presentan un resumen importante del paso de los modelos brownianos clásicos a los brownianos fraccionales y sus implicaciones en los supuestos y resultados.

El principal objetivo de este artículo es la generalización de dos resultados fundamentales de finanzas: la valuación de opciones *call* europeas y la modelación de curvas de estructura de plazos. Estas generalizaciones se construyen con el proceso estocástico conocido como MBF que, a diferencia del movimiento browniano tradicional, incorpora en los modelos las características de independencia o dependencia propias de las series financieras analizadas, prácticamente con los mismos supuestos financieros de los modelos desarrollados con el movimiento browniano tradicional.

Para la aplicación del MBF en los problemas mencionados anteriormente, es necesaria también la generalización de la herramienta matemática y la reproducción de los principales resultados del mundo de Black-Scholes, en este caso se utilizan los resultados matemáticos de Hu y Oksendal (2000) y Necula (2002).

Por otro lado, de manera simultánea a los resultados obtenidos del MBF, es necesaria una metodología para la estimación del coeficiente Hurst (H) que determine la independencia o dependencia de una serie, así como hacerla distinguir como una serie fractal. Para el cálculo de este coeficiente se aplica

la metodología Rango Reescalado (R/S) propuesta por el mismo Hurst. En la sección 2 se hace una descripción amplia del coeficiente Hurst y la metodología (R/S).

Un objetivo adicional de este trabajo es la aplicación de la metodología de Hurst a los resultados obtenidos de las ecuaciones Black-Scholes fraccional y general de los bonos, con variables financieras representativas de México; esto tiene la finalidad de comparar valuaciones de opciones y curvas de interés obtenidas a partir del movimiento browniano tradicional y fraccional.

A continuación se hace una breve introducción de los temas presentados en cada una de las secciones.

El contenido de la sección 2 está dedicado al origen y descripción de la metodología (R/S) y del cálculo del coeficiente Hurst que, entre otras funciones, nos sirve para determinar las características de independencia de una serie y distinguir series de tiempo y series fractales. En la sección 3 se aplica la metodología (R/S) al caso de una variable financiera real del mercado mexicano: el Tipo de Cambio peso-dólar (TDC), con el objetivo de determinar si estas series tienen propiedades de independencia, persistencia o antipersistencia y, además, se hace una prueba de significancia.

En la sección 4 se realiza la deducción de la ecuación Black-Scholes fraccional y se determina el precio de una opción europea, considerando un activo subyacente descrito por un MBF. En la sección 5, esta nueva valuación de opciones se aplica al caso de la variable TDC con sus características de persistencia, y se compara con la valuación tradicional Black-Scholes que sí considera el supuesto de independencia. La finalidad es comparar la valuación de opciones, con efectos de persistencia, con las valuaciones tradicionales.

La sección 6 es otro caso de generalización que deduce la ecuación general de los bonos y la estructura de plazos para un modelo Vasicek, considerando como término estocástico un MBF. En la sección 7 se hace un comparativo entre las tasas resultantes considerando el proceso estocástico tradicional y el propuesto para el caso de la modelación de la tasa interbancaria de equilibrio (TIIE). La última sección resume las conclusiones del trabajo.

2. PROCESOS HURST

El científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978) trabajó en el proyecto de construcción de la presa del río Nilo. En el momento del diseño se le presentó el interesante problema de determinar la capacidad de almacenamiento de la presa que dependía del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos, como lluvias y riachuelos, y un flujo controlado de salida del río utilizado primordialmente en el riego. Con anterioridad algunos hidrólogos habían supuesto razonablemente el comportamiento del influjo como un proceso aleatorio; no obstante, a Hurst no le satisfacía esta explicación ya que, en registros históricos que mantenían los egipcios, observó que en el proceso los flujos más grandes del promedio eran seguidos por sobre flujos todavía más grandes; inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores que el promedio y eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores.

A simple vista parecían ciclos cuya longitud, sin embargo, no era periódica. Un análisis estándar revelaba la no existencia de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrolló su propia metodología conocida como Análisis de Rango Reescalado (R/S), cuyo coeficiente o exponente, conocido propiamente como Hurst, es una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales.

Hurst, al resolver su problema relacionado con la capacidad de la presa, encontró la siguiente ecuación empírica que Mandelbrot y Ness (1968 y 1982) probaron posteriormente en 1969:

$$(R/S)_n = cn^H \quad (1)$$

donde (R/S) se conoce como el estadístico Rango Reescalado.

c = Constante

n = Indicador del valor de la serie de tiempo o tamaño del subperiodo

H = Exponente o coeficiente Hurst

En general, los valores de (R/S) se incrementan con n por el valor de la ley de potencias, igual al exponente Hurst. Esta es la primera conexión del fenómeno Hurst y la geometría fractal, además hay que mencionar que el método (R/S) es un análisis no paramétrico que no requiere de una distribución específica.

Para que una serie pueda ser considerada como fractal, el requisito clave que debe cumplir es una escala de ley de potencia.

Por medio de una regresión lineal, de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$, se determina el exponente Hurst como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\ln(R / S)_n = \ln(c) + H \ln(n) \quad (2)$$

Si el sistema tiene características de independencia entonces $H = 0.50$, si $0.5 < H < 1.0$ implica series de tiempo persistentes caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo, por lo tanto, lo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre, y si $0.0 < H < 0.5$, significa antipersistencia en la serie de tiempo. Como resultado de su investigación sobre la presa del río Nilo, Hurst encontró un coeficiente de $H=0.91$. Aunque el estudio se empleó para el caso del flujo del río Nilo, en términos generales puede aplicarse a cualquier serie que se sospeche se comporte como fractal en cualquier otra área de estudio.

La metodología que desarrolló Hurst consiste, en forma general, en tomar los rendimientos logarítmicos de una serie de tiempo de tamaño M . Posteriormente se forman A subperiodos contiguos de longitud n , y para cada uno de dichos subperiodos Ia de longitud n se determina su valor promedio. Se van sumando las diferencias de cada elemento, respecto de la media, en cada subperiodo, para obtener una nueva serie de diferencias acumuladas, y se determina como "Rango" la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la serie acumulada en cada subperiodo de tamaño n . Por otro lado, se estima la desviación estándar muestral SIa de las series de diferencias de la forma tradicional. Y, para cada periodo el rango RIa se normaliza dividiéndolo por su desviación estándar muestral SIa correspondiente. Por lo tanto, el rango

reescalado para cada subperiodo Ia es igual a (RIa / SIa) . Como se tienen A periodos continuos de longitud n , entonces se toma el valor promedio R/S para todos los periodos.

La longitud n o el tamaño del subperiodo se incrementará al siguiente valor posible de tal forma que $(M-1)/n$ sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos hasta $n = (M-1)/2$. Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R/S)n$ contra $\log(n)$. La ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente Hurst (H).¹

En párrafos anteriores se han mencionado los pasos para la determinación del coeficiente Hurst (H) y el comportamiento de los procesos, de acuerdo al valor de dicho exponente.

Sin embargo, en la práctica es necesario distinguir si el resultado de un coeficiente empírico, con un cierto número de datos, puede ser considerado o proceso independiente o con tendencia. Para establecer un criterio se debe plantear una prueba de significancia sobre los resultados de un análisis (R/S) similar a las pruebas “t” de las regresiones lineales.

En un inicio Hurst estableció su hipótesis nula sobre una distribución binomial, resultado del lanzamiento de volados. Más tarde, Feller llegó a un resultado similar por otro camino, suponiendo una hipótesis nula en la que $H=0.5$ tiene un comportamiento de caminata aleatoria o de browniano tradicional, es decir, de independencia, contra las hipótesis alternativas ($H < 0.5$ y $H > 0.5$) que corresponden al comportamiento antipersistente o persistente de los procesos. Los valores propuestos para el valor esperado y la varianza del coeficiente (H) son:

$$E(R'(n)) = (n\pi/2)^{1/2} \quad (3)$$

$$VaR(E[R'(n)]) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right)n \quad (4)$$

¹ Para mayor información sobre el coeficiente Hurst o la metodología (R/S) consultar Peters (1991 y 1994).

La ecuación anterior fue corregida por Alanis y Lloyd (1976) para la determinación del valor esperado del rango reescalado y, después de una corrección empírica (ver Peters, 1991), se llega a una ecuación para el valor esperado de H :

$$E(R/S_n) = \left(\frac{n-0.5}{n}\right) \left(\frac{n\pi}{2}\right) \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (5)$$

Debido a que los valores de R/S son normalmente distribuidos, entonces, también podemos tomar los valores de H como normalmente distribuidos, en este caso la varianza esperada del exponente Hurst se demuestra empíricamente:

$$VaR(H) = \frac{1}{T} \quad (6)$$

donde T es el número de observaciones de la muestra.

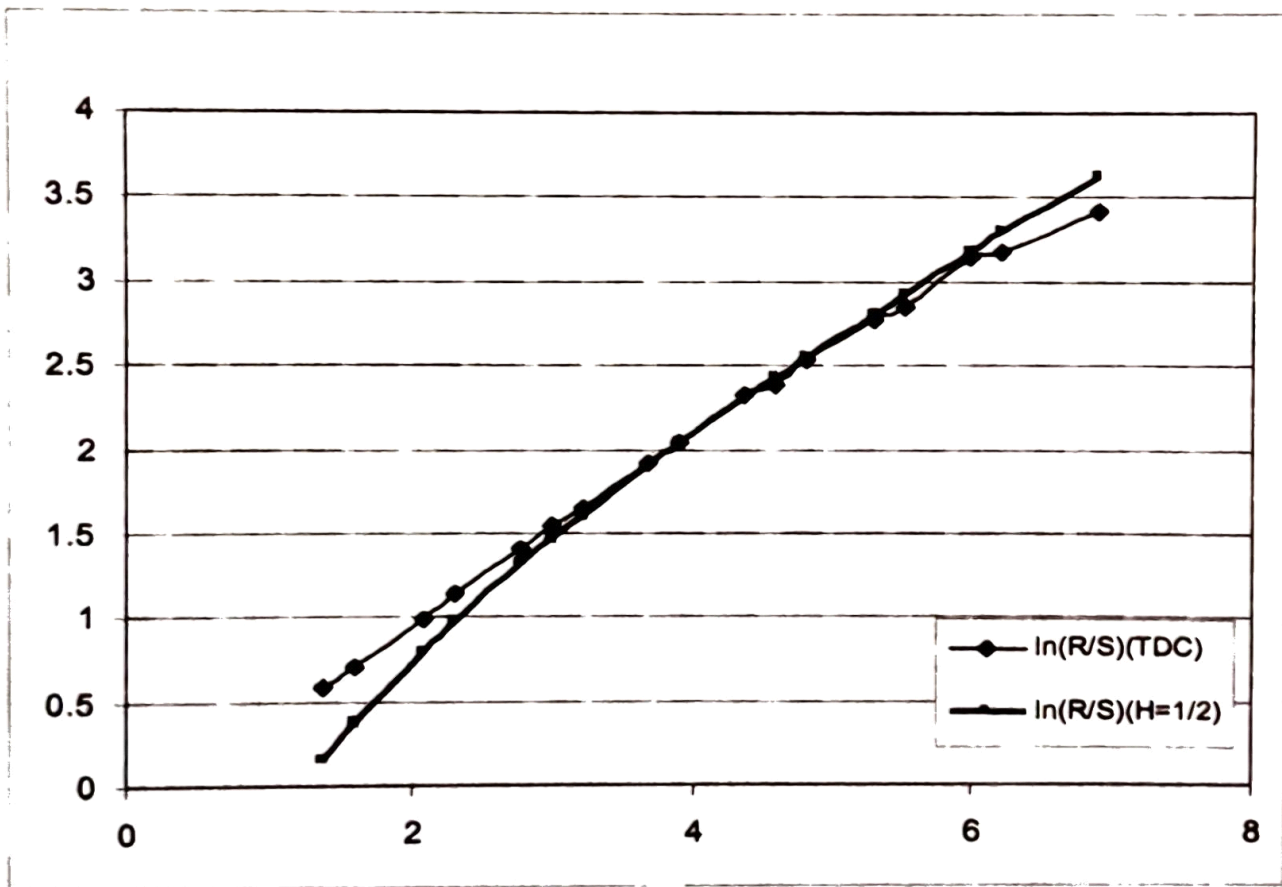
A partir del valor esperado y la varianza de acuerdo a la estimación de las ecuaciones (3) y (4), o bien con el criterio de las ecuaciones (5) y (6), podemos determinar el nivel de significancia con un estadístico que nos dice cuantas desviaciones estándar se encuentran alejadas del valor medio $E(H)$ y el valor obtenido de H , en el proceso de Rango-Reescalado.

3. COEFICIENTE HURST EN EL MERCADO DE MÉXICO

Aplicando la metodología (R/S), descrita anteriormente para la estimación del coeficiente Hurst, al caso del mercado financiero de México, en la variable del tipo de cambio peso-dólar (TDC) se toma la serie SF 43788 del Tipo de Cambio pesos por dólar EUA interbancario 48 horas al cierre de compra de 2000, datos que van de enero de 1999 a diciembre del 2006. Considerando los tamaños de conjunto (n) para los siguientes TDC: 10,16,20,25,40,50,80,100,125,200,250,400,500,1000.

En la gráfica 1 se muestran las variables $\ln(R/S)$ contra $\ln(n)$, comparando el caso del TDC con el de ($H=1/2$). Se aprecia la pendiente positiva de ambas gráficas y, de acuerdo a la metodología, cuando la recta pierde esta tendencia corresponde al tamaño del ciclo, alrededor de 6 en el eje de la gráfica, que son cerca de 400 días naturales.

GRÁFICA 1
 Estadístico $\ln(R/S)$ del TDC vs $\ln(n)$



Posterior a la metodología del Rango Reescalado se hace una regresión de $\ln(R/S)$ contra $\ln(n)$. Los resultados para H , $E(H)$, $DE(H)$ aparecen en la siguiente tabla.

TABLA 1

Estadísticos y Coeficiente Hurst del TDC

<i>Serie</i>	<i>H</i>	<i>E(H)</i>	<i>DE(H)</i>	$(H-E(H))/DE(H)$	<i>Acepta Ho</i>
TDC	0.5096	0.5726	0.0223	-2.8251	S

En la tabla anterior se puede observar la estimación del coeficiente Hurst para las serie del TDC del mercado mexicano. El valor del exponente H nos podría sugerir que la serie se comporta con características de persistencia pero, si tomamos en cuenta el valor esperado y la desviación estándar (DE), los resultados no son significativos y se mantiene la hipótesis nula de un comportamiento independiente. Por lo tanto, aunque teóricamente los valores son ligeramente mayores que $H = 0.5$, estadísticamente no pueden ser considerados de características persistentes.

**4. ECUACIÓN BLACK-SCHOLES Y VALUACIÓN DE UNA
OPCIÓN EUROPEA EN UN MERCADO FRACCIONAL**

La ecuación Black-Scholes, publicada en 1973 y derivada por Fischer Black y Myron Scholes, es una ecuación lineal diferencial parcial parabólica con valores en la frontera. Dicha ecuación presupone que el comportamiento del subyacente, asociado al derivado, puede modelarse en su término estocástico con un movimiento browniano, y para su derivación hace uso de al menos dos conceptos básicos de finanzas: la cobertura y el no arbitraje.

Para la deducción del modelo de Black-Scholes tradicional y la deducción de la ecuación fraccional se consideran los siguientes supuestos:

- i) Existe una tasa libre de riesgos y una varianza, ambas constantes
- ii) El mercado es líquido para el activo subyacente y el derivado
- iii) No hay costos de transacción
- iv) Se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa
- v) No se pagan dividendos.
- v) No hay oportunidades de arbitraje.

El precio de una opción *call* europea en cualquier $0 \leq t \leq T$, dado un precio de ejercicio K , una tasa libre de riesgo r , una volatilidad, un vencimiento en T y un coeficiente Hurst H de la serie financiera subyacente, de acuerdo a los trabajos de Hu y Oksendal (2000) y de Necula (2002), que verificaron que el mercado es completo y no existe el arbitraje, está dado por:

$$C(t, S(t)) = S(t) N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (7a)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (7b)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (7c)$$

Para poder derivar una generalización de la Ecuación Black-Scholes fraccional y comprobar la solución anterior (deducida por Necula), se propone que el término estocástico del activo subyacente esté descrito por un MBF.

Se considera el comportamiento del activo subyacente como un movimiento geométrico browniano con término estocástico, generado por un MBF:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB_H(t) \quad (8)$$

y de un derivado que puede ser un *call* europeo, función del tiempo descrito por la siguiente expresión

$$dC(t, S) = \frac{\partial C(t, S)}{\partial t} dt + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dB_H(t) + \sigma D^{\phi}_s S(t) \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} dt \quad (9)$$

Consideremos la derivada en un MBF;² llegamos al Lema de Itô, el cual generalizado se escribe como:

$$dC(t, S) = \left[\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dt + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dB_H(t) \quad (10)$$

Siguiendo la misma idea para la deducción de la ecuación Black-Scholes original, se construye un portafolio de cobertura con una combinación de un derivado y su subyacente:

$$\pi = w_1 S(t) + w_2 C(t, S) \quad (11)$$

o bien el cambio diferencial del portafolio

$$d\pi = w_1 dS(t) + w_2 dC(t, S) \quad (12)$$

² Para mayores detalles consultar Duncan, Hu y Pasik-Duncan (2002) y Necula (2002).

Sustituyendo dS y dC en la ecuación (12) tenemos

$$d\pi = w_1 [\mu S dt + \sigma S dB_H] + w_2 \left[\left[\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dt + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} dB_H(t) \right] \quad (13)$$

Una posible combinación de cobertura de posiciones que hace que la parte estocástica se elimine es:

$$w_1 = -\frac{\partial C(t, S)}{\partial S}, w_2 = 1 \quad (14)$$

Entonces, el cambio en el portafolio denotado por $d\pi^{(1)}(t)$ queda como:

$$d\pi^{(1)} = \frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \sigma^2 S^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} \quad (15)$$

Por otra parte, el rendimiento de un portafolio libre de riesgo de una cuenta bancaria está dado por:

$$d\pi^{(2)} = \pi r dt = \left(-\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + C \right) r dt \quad (16)$$

Debido a la existencia de no arbitraje, podemos igualar los rendimientos de los portafolios (1) y (2), ecuaciones (15) y (16), y después de organizar términos llegamos a la ecuación Black-Scholes fraccional:

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + H \sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} + r S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} - r C(t, S) = 0 \quad (17 a)$$

con condiciones de frontera:

$$C(t,S) = \text{Max}(S - K, 0) \quad (17 \text{ b})$$

De forma alternativa, la ecuación Black-Scholes fraccional también se puede representar en términos de las letras griegas y comprobar que la solución encontrada en la sección anterior, ecuación (17 a), satisface la siguiente ecuación:

$$\Theta + rS \delta + H \sigma^2 t^{2H-1} S^2 \Gamma - rC = 0 \quad (18)$$

donde cada una de las letras griegas, en el caso browniano fraccional, está dada por:³

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \quad (19 \text{ a})$$

$$\nabla = \frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (19 \text{ b})$$

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Sf(d_1) \sqrt{T^{2H} - t^{2H}} \quad (19 \text{ c})$$

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (19 \text{ d})$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{N''(d_1)}{S\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (19 \text{ e})$$

³ Para mayor detalle consultar Necula (2002).

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - Ht^{2H-1}\sigma Ke^{-r(T-t)} \frac{N'(d_2)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (19 \text{ f})$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (a, b, c, d, e, f), el valor de $C(t,S)$ y la identidad siguiente $N'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$, se verifica que la solución propuesta satisface la ecuación Black-Scholes fraccional. La N es la función de densidad de una normal estándar.

5. APLICACIÓN DE LA VALUACIÓN DE OPCIONES *CALL* EUROPEAS AL CASO DEL MERCADO MEXICANO

En esta sección se realiza la valuación de opciones *call* europeas sobre el subyacente TDC, para diferentes valores de H que están entre 0.5 y 1. En particular, se conocen los valores H de cada una de las series anteriores con la metodología (R/S), que determina las características de independencia de las variables. Los parámetros necesarios con los que se evaluaron las opciones *call* aparecen en la siguiente tabla.

TABLA 2

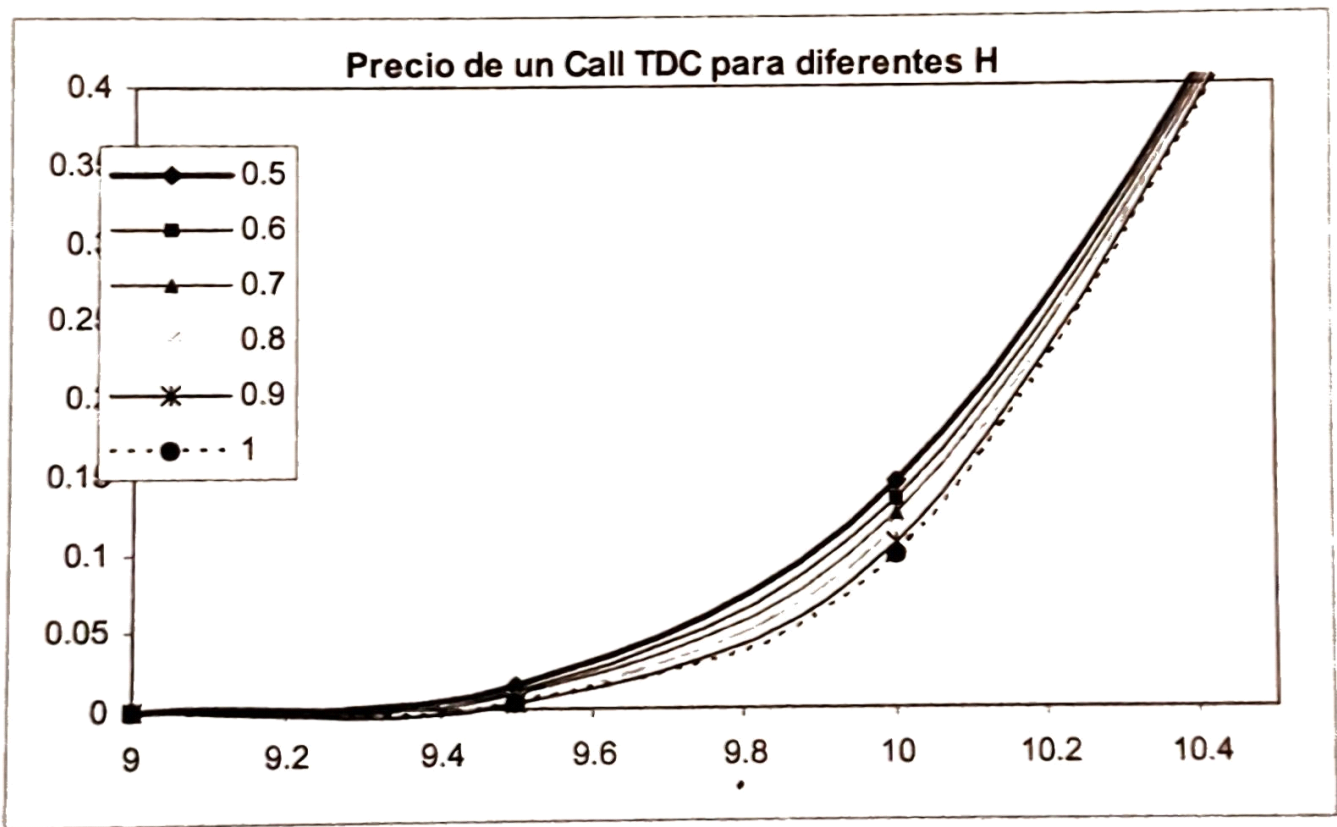
Parámetros para la estimación de una Opción *Call* considerando H

<i>Serie</i>	<i>D.E.</i>	<i>r</i>	<i>K</i>	<i>T</i>	<i>H</i>
TDC	0.0572	0.03	10.5	0.5	0.5255

La gráfica 2 muestra diferentes curvas de precios de opciones *call* sobre el TDC como función de $S(t)$ y del coeficiente Hurst. Se puede observar que, conforme el valor de H va aumentando (de 0.5 a 1), cada curva asociada del precio del *call* se va desplazando de forma casi paralela hacia la parte inferior de la figura. Es decir, entre mayor sea la dependencia de una serie

financiera con su pasado, el precio de una opción *call* europea, calculado con la ecuación fraccional, será menor que el valor de un *call* europeo obtenido por el método tradicional.

GRÁFICA 2
Precio de un *call* TDC para diferentes H



Observando las mismas curvas, parece que el mayor cambio en el precio del *call* para ambos índices ocurre cuando se encuentran cerca del precio de ejercicio. Sin embargo, la mayor diferencia porcentual ocurre cuando se combinan las siguientes dos situaciones: que la opción esté fuera del dinero $S < K$ y, además, que H sea muy cercana a uno. En ese caso, el precio de la opción fraccional puede llegar a cien por ciento por debajo de la valuación tradicional.

La misma característica de sobrevaluación teórica de los *calls* de los subyacentes del TDC también se aprecia en los *puts* europeos y, de manera similar, el efecto es más notorio cuando se está cerca de H igual a uno y fuera del dinero $S > K$.

En la siguiente sección, de forma análoga a la presente, se harán las deducciones de la ecuación general de los bonos y se estimará la estructura de plazos, proponiendo un modelo de tasa corta Vasicek basado en el modelo fraccional, que dependerá del coeficiente Hurst (sección 2) y de la TIEE considerada como tasa corta.

6. MODELO DE TASAS VASICEK CON MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONAL

El modelo de tasas Vasicek, desarrollado por el autor del mismo nombre en 1977, describe el comportamiento de la tasa corta o tasa *spot* con una característica importante, reversión a la media, es decir, en el largo plazo no se converge a un cierto valor de tasa de interés independientemente de donde haya iniciado. A partir de esta descripción es posible deducir una ecuación general de bonos (una ecuación lineal diferencial parcial de segundo orden con valores a la frontera) cuya estructura matemática es similar a la ecuación Black-Scholes. La solución a dicha ecuación nos proporciona el precio de un bono en sus diferentes plazos y, de manera equivalente, a partir de esta solución se puede obtener la función de estructura de plazos, es decir la tasa de interés para cada uno de éstos. Se debe mencionar la existencia de otros supuestos importantes, como la existencia de un mercado donde se puede prestar y pedir prestado y la simetría en la información de los agentes.

En esta sección se propone que la tasa corta sea descrita por un modelo Vasicek con regresión a la media pero, a diferencia del caso anterior, el término estocástico debe estar modelado por un MBF, es decir, se propone un modelo para series de tasas que posean características más generales y no solamente la independencia. Además, se consideran los mismos supuestos financieros del caso Vasicek modelado por el browniano tradicional, mencionados en la sección anterior.

Se inicia considerando un modelo de tasa corta Vasicek con reversión a la media, pero con la diferencia de que dB_H es un MBF

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_H \quad (20)$$

Si se considera dos bonos de tasa fija con diferentes vencimientos en T_1 y T_2 dados por:

$$B_1 = B_1(t, r_t; T_1) \quad (21 a)$$

$$B_2 = B_2(t, r_t; T_2) \quad (21 b)$$

y se construye un portafolio que esté integrado por los dos bonos con diferentes fechas de vencimiento,

$$\pi = w_1 B_1 + w_2 B_2 \quad (22 a)$$

o bien, en términos de incrementos, el cambio en el portafolio es:

$$d\pi = w_1 dB_1 + w_2 dB_2 \quad (22 b)$$

Por otra parte, se sabe que el cambio en el precio de cualquiera de los dos bonos, de acuerdo al lema de Itô fraccional (10), está dado por:

$$dB_i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial t} + a(b - r_t) \frac{\partial B_i}{\partial r} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial B_i}{\partial r} \sigma dB_{H(t)} \quad (23)$$

Después de sustituir las ecuaciones y de organizar términos, el cambio del valor del portafolio será:

$$d\pi(1) = w_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} \right) dt + w_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} \right) dt \quad (24)$$

Con la siguiente condición se busca eliminar la parte estocástica (browniano fraccional) para tener un portafolio de cobertura; una posible solución que satisface la ecuación anterior y hace el valor estocástico cero es, $w_1 = 1$ y

$$w_2 = - \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \quad (25)$$

Por otro lado tenemos que, el rendimiento de un portafolio en un mercado libre de riesgos está dado por:

$$d\pi^{(2)} = r, \pi dt = r t \left(B_1 - \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \right) \quad (26)$$

Utilizando la condición de no arbitraje, se iguala el rendimiento libre de riesgo de los portafolios 1 y 2 y se tiene:

$$\frac{\frac{\partial B_1}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - r B_1}{\frac{\partial B_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial B_2}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2} - r B_2}{\frac{\partial B_2}{\partial r}} \quad (27)$$

De la ecuación anterior podemos observar que, la forma de la expresión es independiente del vencimiento del bono, es decir:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - rB}{\frac{\partial B}{\partial r}} = m(r, t) \quad (28)$$

Es fácil comprobar, como en el caso tradicional, que $m = -a(b - r_t)$. De esta forma se llega a la ecuación general de los bonos

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2} - a(b - r_t) \frac{\partial B_1}{\partial r} - r_t B = 0 \quad (29)$$

con la condición de frontera $B(r_T, T; T) = 1$.

La solución de la ecuación general de los bonos nos proporciona el precio del bono en un mercado browniano fraccional; para encontrarla se propone una solución del siguiente tipo:

$$B = B(t, r_t) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)} \quad (30)$$

donde $A(t, T) = D(t, T) = 0$. Se sustituye en las derivadas parciales $\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)$ y $\left(\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\right)$, y derivando respecto de B se llega a:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial D}{\partial t} + \sigma^2 H t^{2H-1} D^2 - a(b - r_t) D - r_t = 0 \quad (31)$$

Posteriormente, se deriva respecto a r_t y se obtiene una ecuación con una sola variable que resulta más fácil de resolver

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD(t, T) - 1 \quad (32)$$

con solución

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (33)$$

Se sustituye en las ecuaciones anteriores y se llega a la siguiente expresión que sólo depende de A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2 H}{a^2} t^{2H-1} + \frac{2\sigma^2}{a^2} t^{2H-1} e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2 H}{a^2} t^{2H-1} e^{-2a(T-t)} \quad (34)$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior, y después de ordenar términos, se llega a:

$$\begin{aligned} A = & \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^3} - \frac{\sigma^2}{4a^3} - b(T-t) - \frac{b}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (T^{2H} - t^{2H}) \\ & + \frac{2\sigma^2 H}{a^3} e^{-a(T-t)} \left(t - \frac{1}{a}\right)^{2H-1} - \frac{\sigma^2 H}{2a^3} e^{-2a(T-t)} \left(t - \frac{1}{2a}\right)^{2H-1} \end{aligned} \quad (35)$$

En el caso límite, cuando $H \rightarrow \frac{1}{2}$, se tiene que los valores de las funciones $A(t, T)$ y $D(t, T)$, del caso browniano fraccional, convergen a la solución del browniano tradicional, es decir $D_{MBF} \rightarrow D_{MB}$ y $A_{MBF} \rightarrow A_{MB}$, entonces $B_{MBF}(t, T) \rightarrow B_{MB}(t, T)$ y como $D \neq D(H)$, el valor de la función D en el caso browniano y browniano fraccional es el mismo.

7. APLICACIÓN DEL MODELO DE TASAS VASICEK CON MBF A UN CASO DE TASAS EN MÉXICO Y DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE TASAS VASICEK CON MBF

Así como es posible conocer el precio de un bono $B(t, r_t, T)$ como función de $D(t, T)$ en el caso del mercado browniano fraccional, también se puede, a partir del precio del bono, determinar la función de estructura de plazos con ayuda de la expresión siguiente:

$$R(t, T) = \frac{rD(t, T) - A(t, T)}{T - t} \quad (36)$$

Para el análisis se tomaron 320 datos de la tasa interbancaria diaria de México (TIIE) del 31 de enero de 2005 al 4 de abril de 2006. σ corresponde a la desviación estándar histórica de la serie y los valores de a y b se obtienen a partir de los estimadores de las regresiones siguientes, donde r_t es la TIIE de corto plazo para el tiempo t :

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \varepsilon_t \quad (37)$$

Si discretizamos la ecuación para r_t y t e identificamos términos, concluimos que pueden determinarse los valores de a y b a partir de los estimadores β_0 y β_1 de la regresión anterior

$$a = 1 - \beta_1 \quad (38 \text{ a})$$

$$b = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} \quad (38 \text{ b})$$

Los valores de los parámetros se muestran en la tabla 3.⁴

⁴ Para mayores detalles consultar Sierra (2007).

TABLA 3

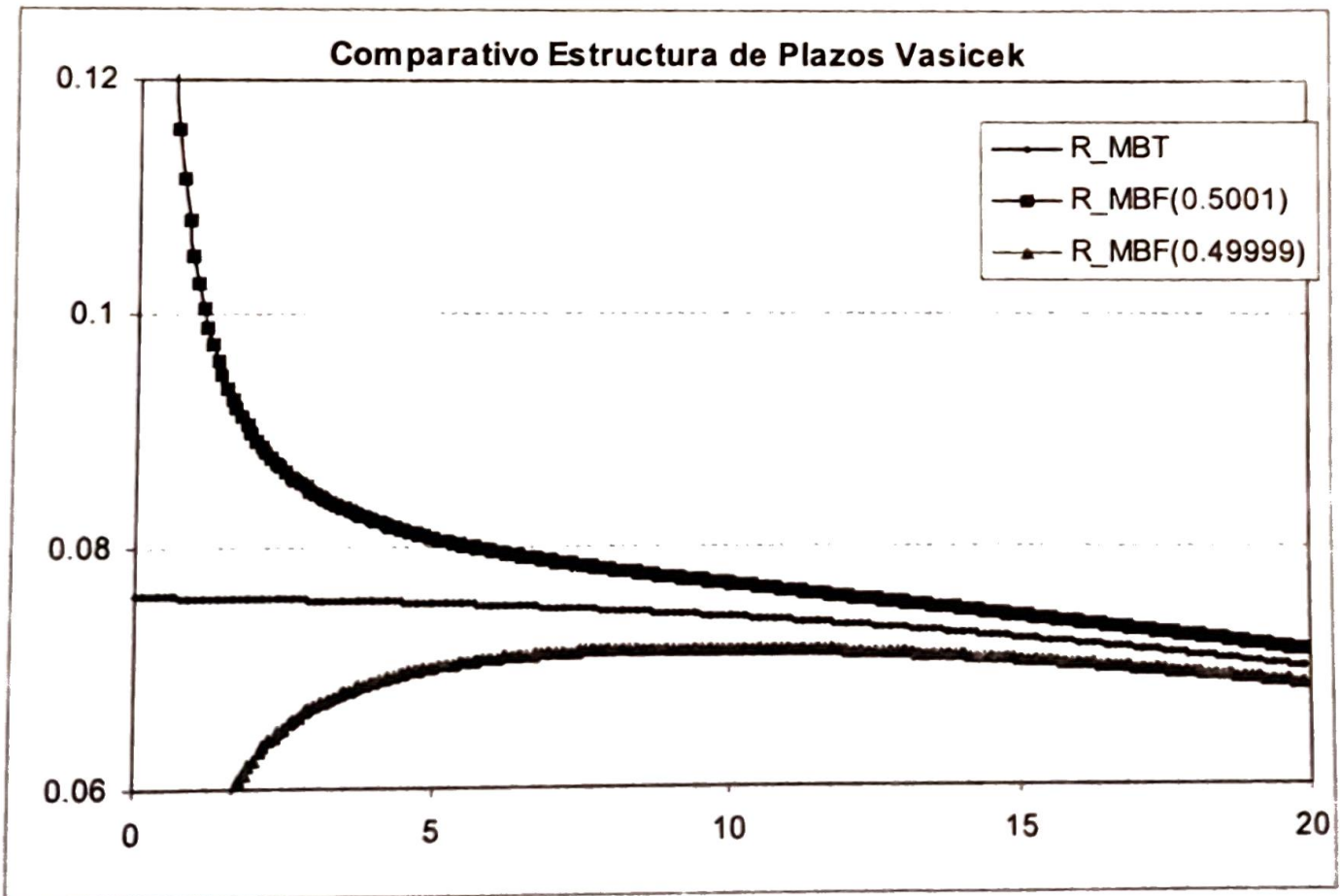
Parámetros para la estimación de la Curva Vasiceck considerando H

<i>Parámetros</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>R</i>	σ
Valores	0.099	-0.006	7.6	0.008

La gráfica 3 muestra un comparativo de las curvas de la estructura de plazos del modelo Vasicek, obtenidas a partir de un modelo de tasa corta con término browniano tradicional y browniano fraccional para valores de H ligeramente diferentes de 0.5. Cabe mencionar que la curva de estructura de plazos resulta ser más sensible a pequeñas variaciones del coeficiente Hurst que en el caso de la valuación del *call* europeo de la sección 5, además, se puede verificar que ahora el valor de la estructura de plazos $R(t, T)$ es función de t y H .

GRÁFICA 3

Comparativo Estructura de Plazos Vasicek



Como se observa en la gráfica 3, un pequeño incremento en el valor de H , de 0.5 a 0.50001, genera en el largo plazo (plazos mayores a 5 años) las tasas de los modelos de estructura de plazos para el modelo Vasicek tradicional, por debajo del Vasicek fraccional, y tienden a converger a un mismo valor. Sin embargo, en el corto plazo el valor de la curva fraccional se dispara y crece rápidamente.

De las observaciones anteriores se puede concluir que, el supuesto de independencia de los incrementos en la series de las tasas, como en el caso de la TIE, resulta ser más importante que en los casos de las valuaciones de las opciones analizadas en secciones anteriores. Como consecuencia, cuando una serie de tasas cortas de interés presenta características de persistencia, el modelo de la estructura de plazos de Vasicek solamente proporciona una buena aproximación en el largo plazo.

8. CONCLUSIONES

La primera aportación del presente trabajo muestra que, el valor obtenido del coeficiente Hurst por el método (R/S) para la serie financiera TDC, representativa del mercado mexicano, si bien en un inicio parece poseer características de persistencia (teóricamente $H > 0.5$), al final resulta no ser estadísticamente significativa, por lo que se mantiene la hipótesis inicial de independencia de dicha serie.

Con el proceso estocástico del MBF es posible deducir la ecuación Black-Scholes y la valuación de derivados, en un contexto más general que toma en cuenta las características particulares del mercado en estudio dentro del coeficiente H . Otra aportación del presente estudio es que el modelo Black-Scholes fraccional teórico estima un precio menor para las opciones *calls* y *puts* europeas, en caso de que el activo subyacente posea propiedades de persistencia. Esta diferencia con la estimación de precio Black-Scholes tradicional es mayor conforme mayor sea la dependencia o correlación de las series, es decir, para H cercana a uno. El efecto se refuerza cuando la opción se encuentra fuera del dinero. La combinación de ambos resultados,

en el caso extremo, puede llegar a generar un precio calculado con el MBF que sea cien por ciento menor que el obtenido por el browniano tradicional.

Utilizando en la modelación de la tasa corta Vasicek un MBF como término estocástico, se puede deducir la ecuación general de los bonos y su función de estructura de plazos. Comparando esta curva con la del modelo Vasicek obtenida del browniano tradicional, se observa que la curva de tasas es muy sensible al valor de H , es decir, al supuesto de independencia de incrementos de las series de tasas cortas, que es muy estricto. Para el caso de la tasa interbancaria de México (TIIE), con una pequeña perturbación alrededor del valor de $H = 1/2$, la función de estructura de plazos pierde su forma en el corto plazo puesto que los valores de las tasas se disparan. Sin embargo, en el largo plazo ambas curvas convergen, respetando su característica de reversión a la media. Por lo tanto, en series con persistencia, el modelo de estructura de plazos Vasicek para tasas de interés es una buena aproximación en el largo plazo y en cada plazo las tasas de interés del modelo Vasicek fraccional son mayores que las del modelo Vasicek tradicional ($H > 1/2$). En otras palabras, los precios obtenidos del modelo Vasicek fraccional son menores que los precios del Vasicek tradicional.

BIBLIOGRAFÍA

- Black, F. y M. Scholes (1973), "The pricing of Options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- Cont, R. (1994), "Long dependence in financial markets, Centre de Mathematiques appliquees", *Ecole Polytechnique France / Finances Publiques*, 49(2), pp. 282-286.
- Dai, W. and C. Hayde (1996), *Itô Formula with respect to fractional brownian motion and its application*, *J. Appl. Math. Stoch., Anal* 9, pp. 439-448.
- Dasgupta, A. (1997), *Fractional Brownian Motion: Its properties and applications to stochastic integration*. Ph. D. Thesis, Dept. of Statistic, University of Carolina at Chapel Hill.
- Dasgupta, A. y G. Kallianpur (2000), *Arbitrage opportunities for class of Gladyshev process*, *Appl. Math. Optim.*, 41, 377-385.

- Duncan, T. E., Y. Hu y B. Pasik-Duncan (2002), *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion*, SIAMJ. Control Optim., 38, pp. 582-612.
- Hu, Y. y B. Oksendal (2000), *Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance*, Preprint University of Oslo.
- Hull, J. y A. White (1987), "The Pricing of Options on Assets on Stochastic Volatilities", *The Journal of Finance*, 42(2), pp. 281-300.
- Hurst, H.(1951), *The long-term storage capacity of reservoirs Transactions of American Society Civil Engineer*, pp. 116-195.
- Kravych, Y. (2002), *Stock Price Modelling by Long-Memory Process, Overview of the Fractional Brownian Motion Approach*, University of New Wales Sydney Australia.
- Lin, S. (1995), "Stochastic analysis of fractional brownian motion and applications", *SIAM Review* 10, pp. 422-437.
- Mandelbrot, B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, NY W.H. Freeman.
- Mandelbrot, B. y V. Ness (1968), "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications", *SIAM Review* 10, 11(3).
- McCulloch, J. (1985), "The value of european Options with Log-Stable Uncertainty", Working paper.
- McCulloch, J. (1978), "The pricing of Short Lived Options when Price Uncertainty is Log-symetris stable", Working paper.
- Necula, C. (2002), "Modelling and detecting Long Memory in Stock returns", Academy of Economic Studies, Dissertation Paper.
- Necula, C. (2002), "Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment", Academy of Economic Studies, Bucharest Romania.
- Norros, I., E. Valkeila y J. Virtamo (1999), "An Elementary Approach to a Girsanov Formula and Other Analytical Results on Fractional Brownian Motions", *Bernoulli*5(4), pp.571-587.
- Oksendal, B. (2004), *Fractional Brownian Motion in Finance*, Preprint University of Oslo.
- Palomas, E. (2002), "Evidencia e implicaciones del fenómeno Hurst en el mercado de capitales", *Gaceta de economía*, Año 8, Núm 15.
- Peters, E. (1991), *Chaos and Order in Capital Markets*, New York: John Wiley and Sons.

- Peters, E. (1994), *Fractal Market Analysis (Applying Chaos Theory to Investment an Economic)*, New York: John Wiley and Sons.
- Rostek, S. y S. Rainer (2006), *Schobel Risk Preference Based Option Pricing in Fractional Brownian Market*, Preprint Faculty of Economics and Business Administration, University of Tbingen, Germany.
- Shiryaev, A. (1998), *On arbitrage and replication for fractal model*, Shiryaev and Sulem editors, Workshop on mathematical finance, INRIA, Paris.
- Sierra, G. (2007), "Procesos Hurst y Movimiento Browniano Fraccional en Mercados Fractales", Tesis de Doctorado en Ciencias Financieras, ITESM, CCM.
- Vasconcelos, G. (2004), *A guide walk down wall street: an introduction to econophysics*, Universidade Federal Pernambuco Brasil.
- Vasicek, O. (1977), "An equilibrium characterization of term structure", *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177-188.
- Wilmott, P. (2005), *Quantitative Finance*, Wiley.